TD13 cor

$\boxed{\text{ex } 9}$ • $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{a}\lfloor \frac{b}{x} \rfloor$

Soit $x\neq 0$ $\frac{b}{x}-1 < \lfloor \frac{b}{x}\rfloor \leq \frac{b}{x}$

Si $x>0$ $\frac{x}{a}\left(\frac{b}{x}-1\right) < \frac{x}{a}\lfloor \frac{b}{x}\rfloor \leq \frac{x}{a}\frac{b}{x}$

donc $\frac{b}{a}-\frac{x}{a} < \frac{x}{a}\lfloor \frac{b}{x}\rfloor \leq \frac{b}{a}$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{a}\lfloor \frac{b}{x}\rfloor = \frac{b}{a}$

par th des gendarmes

Si $x<0$

$\frac{x}{a}\frac{b}{x} \leq \frac{x}{a}\lfloor \frac{b}{x}\rfloor < \frac{x}{a}\left(\frac{b}{x}-1\right)$

$\frac{b}{a} \leq \frac{x}{a}\lfloor \frac{b}{x}\rfloor < \frac{b}{a}-\frac{x}{a}$

donc $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{a}\lfloor \frac{b}{x}\rfloor = \frac{b}{a}$

Concl : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{a}\lfloor \frac{b}{x}\rfloor = \frac{b}{a}$

• $\lim\limits_{x\to 0} \frac{b}{x}\lfloor \frac{x}{a}\rfloor$

Soit $x\in]0,a[$ alors $\lfloor \frac{x}{a}\rfloor = 0$ donc $\frac{b}{x}\lfloor \frac{x}{a}\rfloor = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{b}{x}\lfloor \frac{x}{a}\rfloor = 0$

Soit $x\in [-a,0[$ alors $\lfloor \frac{x}{a}\rfloor = -1$ donc $\frac{b}{x}\lfloor \frac{x}{a}\rfloor = -\frac{b}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{b}{x}\lfloor \frac{x}{a}\rfloor = +\infty$

$\boxed{\text{ex } 12}$ Soit $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$f(x)-f(x_0) = \frac{2x-1}{x+3} - \frac{2x_0-1}{x_0+3} = \frac{7(x-x_0)}{(x+3)(x_0+3)}$.

On se place dans un voisinage de x_0 ne contenant pas -3.

Soit $\varepsilon>0$. On pose $\eta = \frac{1}{2}|x_0+3|$

Pour tout $x\in]x_0-\eta, x_0+\eta[$ on a $x_0\neq -3$ et $x+3 \in]x_0+3-\eta, x_0+3+\eta[$

donc $x+3 > x_0+3-\eta = x_0+3-\frac{1}{2}|x_0+3| = \frac{1}{2}|x_0+3| = \eta > 0$ si $x_0+3>0$.

et si $x_0+3<0$ $x+3 < x_0+3+\eta = x_0+3+\frac{1}{2}(-x_0+3) = \frac{1}{2}(x_0+3)$

donc $-(x+3) > -\frac{1}{2}(x_0+3) = \eta > 0$

Dans les 2 cas $|x+3| > \eta = \frac{1}{2}|x_0+3|$ donc $\frac{1}{|x+3|} < \frac{2}{|x_0+3|}$

Soit $x\in]x_0-\eta, x_0+\eta[$, $|f(x)-f(x_0)| = \frac{7|x-x_0|}{|x+3||x_0+3|} < \frac{14|x-x_0|}{|x_0+3|^2}$

on a $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ dès que $|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{14}(x_0+3)^2$ et $|x-x_0|<\eta$

on choisit $\alpha = \inf\left(\frac{\varepsilon}{14}(x_0+3)^2, \frac{1}{2}|x_0+3|\right)$

alors si $|x-x_0|<\alpha$ on a $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.

Exercice 8

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(x-4)(x-1)} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x-1)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{(\sqrt{x}+2)(x-1)} = \frac{1}{12}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x}-x = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{x\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

Exercice 7

$\lim_{x\to 1^-} (x+E(x)) = 1+0=1$ et $\lim_{x\to 1^+} (x+E(x)) = 1+1=2$ et $1+E(1)=2$

donc $\lim_{x\to 1} (x+E(x))$ n'existe pas et $x \mapsto x+E(x)$ est continue à droite de 1 mais pas à gauche donc n'est pas continue en 1.

Exercice 13

$\forall x \in \mathbb{R}-\{-1,1\}$, $$\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}-\frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{1+x}$$

$\lim_{x\to 1} -\frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en 1

$\lim_{x\to -1^-} -\frac{1}{1+x} = +\infty$ et $\lim_{x\to -1^+} -\frac{1}{1+x} = -\infty$ donc f n'est pas prolongeable par continuité en -1

Exercice 3 : mq $\lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$

ensemble de définition de $x \mapsto x^2$

$\forall A>0$, montrons qu'il existe $B>0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x<-B \Rightarrow x^2>A$

je propose $B=\sqrt{A}$. En effet, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x<-B<0 \Rightarrow x^2 > (-B)^2 = (-\sqrt{A})^2 = A$.