CORRIGE DU DS 6 , FAIT LE 26/01/24

EXERCICE 1 :

ⓐ $\mathbb{R}^+$ est stable par g : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $1+x>0$ donc $\frac{1}{1+x}>0$ donc $\frac{1}{1+x} \in \mathbb{R}^+$ /0,25
et $v_0 = 0 \in \mathbb{R}^+$ donc v est bien définie 0,5 ou 0,25

ⓑ g est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^+$ 0,25
En tant que telle, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ /0,25
et $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} < 0$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ /0,25 /0,25 /0,5 /0,25

ⓒ voir annexe 0,25×6

ⓓ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $0 \le v_n \le 1$.
Soit $S(n)$: "$0 \le v_n \le 1$" Montrons que $S(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence : 0,25 0,25

- initialisation : $v_0 = 0$ et $0 \le v_0 \le 1$ /0,25
- hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $S(n)$ est vraie et montrons que $S(n+1)$ l'est aussi. /0,25

$0 \le v_n \le 1$ donc $g(0) \geqslant g(v_n) \geqslant g(1)$ car g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ 0,25
$1 \geqslant v_{n+1} \geqslant \frac{1}{2}$ donc $0 \le v_{n+1} \le 1$ et $S(n+1)$ vraie /0,25

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le v_n \le 1$. /0,25

Autre méthode : $[0,1]$ est stable par g. /0,25
En effet, si $0 \le x \le 1$ alors $1 \le 1+x \le 2$ et $\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+x} \le 1$ donc $g(x) \in [0,1]$. 0,25 0,25
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le v_n \le 1$. /0,25 /0,25

ⓔ Comme g est une fraction rationnelle, g est continue sur $\mathbb{R}^+$
et donc si v converge, c'est vers un point fixe de g.
Résolvons l'équation $\frac{1}{1+a} = a$, avec $a \in \mathbb{R}^+$. /0,25
$\forall a \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{1+a} = a$ ssi $1 = a(1+a)$ ssi $a^2+a-1=0$ ssi $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 0,25
$(\Delta = 1 - 4\times(-1) = 5)$ /0,25 0,25
or $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ donc $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ /0,25

Conclusion : si v converge, sa limite est $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

ⓕ (i) Comme g est décroissante, $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraire. 0,25 0,25
On a $v_2 = \frac{1}{1+v_1} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+0}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} > v_0 = 0$. 0,25 0,25

donc $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(ii) $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 donc d'après le théorème de la limite monotone, $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. 0,25 0,25 0,25

(iii) Comme $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et comme elle est minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge 0,25 0,25 0,25

(iv) Comme $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{2n+1} = \frac{1}{1+v_{2n}}$, par passage à la limite on a :
$L' = \frac{1}{1+L}$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{2n+2} = \frac{1}{1+v_{2n+1}}$, on a par passage à la limite : $L = \frac{1}{1+L'}$ et on sait que $L, L' \in \mathbb{R}^+$ et $L, L' \subset [0,1]$ 0,25 0,25
puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le v_n \le 1$

On cherche donc à résoudre le système : $\begin{cases} L' = \frac{1}{1+L} \\ L = \frac{1}{1+L'} \end{cases}$ avec $L, L' \in [0,1]$

$$\begin{cases} L' = \frac{1}{1+L} \\ L = \frac{1}{1+L'} \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} L'(1+L) = 1 \\ L(1+L') = 1 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} L' + LL' = 1 \\ L + LL' = 1 \end{cases}$$ 0,25

$$\text{ssi } \begin{cases} L' - L = 0 \\ L + L^2 = 1 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} L = L' \\ L = a \end{cases} \text{ ssi } L = L' = a.$$ 0,25

Conclusion : $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers a donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers a. 0,25 0,25

(g) (i) $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$, 0,25 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ donc $\frac{3}{2} \leq 1+x \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{2}{3} \leq 1$ 0,25 0,25

1 donc $g(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$ 0,25 et $[\frac{1}{2}, 1]$ est stable par g.

(ii) Soient $x, y \in I$ 0,25

$$|g(x) - g(y)| = \left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| = \left| \frac{1+y-(1+x)}{(1+x)(1+y)} \right| = \frac{|x-y|}{|1+x|\,|1+y|}$$ 0,25 0,25

1,25 or $x \in I$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{2}{3}$ donc $\left|\frac{1}{1+x}\right| \leq \frac{2}{3}$, de même $\left|\frac{1}{1+y}\right| \leq \frac{2}{3}$ 0,25

et $|g(x) - g(y)| \leq \frac{4}{9}|x-y|$

(iii) si $n \geq 2$, $v_n \in I$

D'autre part, $a \in I$! 0,25 En effet $2 < \sqrt{5} < 3$ donc $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$

donc $\forall n \geq 2$, $|g(v_n) - g(a)| \leq \frac{4}{9}|v_n - a|$ 0,25

1 $\forall n \geq 2$, $|v_{n+1} - a| \leq \frac{4}{9}|v_n - a|$ 0,25

De plus, si $n = 0$, $|v_1 - a| = \left|1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| = \left|\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right| \leq \frac{4}{9} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(si $n = 1$, $|v_2 - a| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| = \left|\frac{2-\sqrt{5}}{2}\right| \leq \frac{4}{9}|v_1 - a|$)

donc $\forall n \geq 0$, $|v_{n+1} - a| \leq \frac{4}{9}|v_n - a|$

(iv) Soit $T(n)$: " $|v_n - a| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$ " 0,25 Montrons par récurrence 0,25 que $T(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

- initialisation : $|v_0 - a| = a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq 1 = \left(\frac{4}{9}\right)^0$ 0,25

1,75 - hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T(n)$ est vraie et montrons que $T(n+1)$ est vraie. 0,25

$$|v_{n+1} - a| \leq \frac{4}{9}|v_n - a| \leq \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$$ 0,25

donc $T(n+1)$ est vraie. 0,25

- conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T(n)$ est vraie. 0,25

(v) On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad -\left(\frac{4}{9}\right)^n \leq v_n - a \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$ 0,25

1 De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{4}{9} < 1$ 0,25 0,25

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - a = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$. 0,25

3/8

② ⓐ v est de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n v_0,\ v_0 \in \mathbb{R}$ 0,5
1 (suites géométriques de raison 2).

ⓑ $w_n = c + dn \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

On a $w_{n+1} = 2w_n + 3n + 2$ ssi $c + d(n+1) = 2(c+dn) + 3n + 2$ 0,25

ssi $c + dn + d = 2c + 2dn + 3n + 2$

ssi $n(d - 2d - 3) = c + 2 - d$

1 ssi $n(-d-3) + (d - c - 2) = 0$ 0,25

La fonction polynomiale $x \mapsto c + 2 - d + (d+3)x$ est nulle ssi ses coefficients le sont → ssi $-d - 3 = 0$ et $d - c - 2 = 0$

ssi $d = -3$ et $c = -2 - 3 = -5$

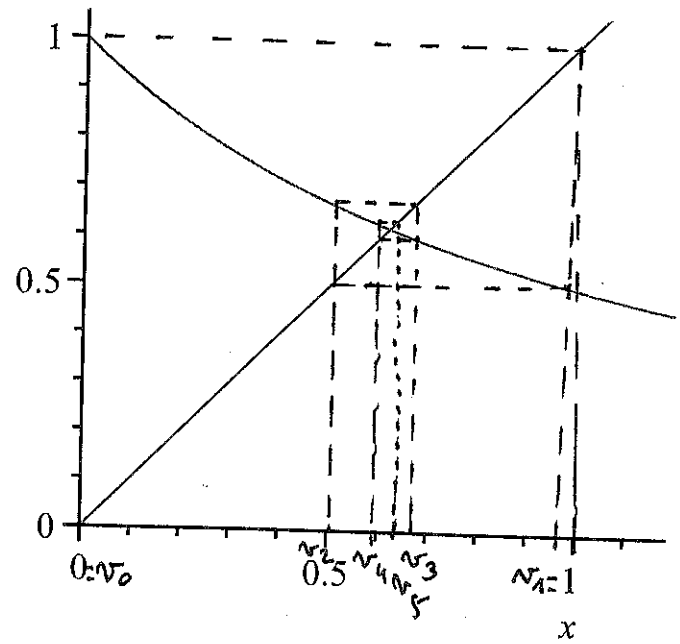
Les réels recherchés sont : $d = -3$ et $c = -5$. 0,25

0,5 ⓒ Les suites recherchées sont les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = k \times 2^n - 5 - 3n$, avec $k \in \mathbb{R}$. 0,5

0,5 ⓓ $u_0 = 2$ ssi $k \times 2^0 - 5 - 3\times 0 = 2$ ssi $k - 5 = 2$ ssi $k = 7$. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 7\times 2^n - 5 - 3n$ 0,25

Ex1 ① ⓒ



Partie A

Exercice 2 : Soit e l'élément neutre de G pour $*$.

① ⓐ • $HK \subset G$ 0,25. En effet $\forall x \in HK$, $\exists h \in H$ et $\exists k \in K$ / $x = h * k$, 0,25

or $(G, *)$ est un groupe donc $*$ est une loi de composition interne sur G, 0,25

1,25 donc comme $h \in H$ et $H \subset G$, $h \in G$ 0,25 ; $k \in K$ et $K \subset G$, $k \in G$ 0,25 $\Rightarrow h * k \in G \Rightarrow x \in G$.

• $HK \neq \emptyset$ 0,25. En effet $(H, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$ donc $e \in H$; $(K, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$ donc $e \in K$ 0,25 0,25

1 donc $\underset{(=e)}{e * e}$ 0,25 $\in HK$ et $HK \neq \emptyset$

4 • $\forall x, y \in HK$ 0,25, $x * y^{-1} \in HK$ 0,25

En effet $\forall x, y \in HK$, $\exists h_1, h_2 \in H$ et $\exists k_1, k_2 \in K$ / $x = h_1 * k_1$, $y = h_2 * k_2$ 0,25

$y^{-1} = (h_2 * k_2)^{-1} = k_2^{-1} * h_2^{-1}$ 0,25

donc $x * y^{-1} = (h_1 * k_1) * (k_2^{-1} * h_2^{-1})$

$= h_1 * \underbrace{(k_1 * k_2^{-1})}$ $* h_2^{-1}$ 0,25 $*$ assoc

1,75 $(G, *)$ est abélien

élément de K puisque $(K, *)$ sous-groupe de $(G, *)$ 0,25 ou $*$ l.c.i de K de H

$= \underbrace{h_1 * h_2^{-1}} * (k_1 * k_2^{-1}) \in HK$

élément de H puisque $(H, *)$ sous-groupe de $(G, *)$ 0,25

Conclusion : $(HK, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$

① ⓑ • $H \subset HK$

En effet, $\forall h \in H$ 0,25, $h = h * e$ 0,25 $\in HK$ 0,25

1 • $K \subset HK$

En effet $\forall k \in K$, $k = e * k$ 0,25 $\in HK$

3 • Soit $(L, *)$ un sous-groupe de $(G, *)$ qui contient H et K.

$\forall x \in HK$ 0,25, montrons que $x \in L$

$\exists h \in H$ et $\exists k \in K$ / $x = h * k$

1 or $H \subset L$ et $K \subset L$ 0,25 donc x est 0 si $\in$ le produit de 2 éléments de L

Comme $(L, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$, $*$ est une loi de composition interne sur L 0,25 donc $x \in L$. 0,25

Ainsi tout sous-groupe de $(G, *)$ contient HK.

Conclusion : $(HK, *)$ est le plus petit sous-groupe de $(G, *)$ qui contient H et K.

Ex 2
PARTIE B

② $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] \subset \mathbb{R}$ par définition

• $1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ car $1 = 1 + 0\sqrt{n}$

$\forall \underset{x+y\sqrt{n}}{z} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ $\forall \underset{x'+y'\sqrt{n}}{z'} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, $z+z' = (x+x') + (y+y')\sqrt{n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$

$zz' = (xx' + nyy') + (xy' + yx')\sqrt{n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$

puisque $x+x' \in \mathbb{Z}$, $y+y' \in \mathbb{Z}$, $(xx'+nyy') \in \mathbb{Z}$ et $(xy'+yx') \in \mathbb{Z}$.

Donc $(\mathbb{Z}[\sqrt{n}], +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

③ ⓐ $z = 0 \iff (y = 0$ et alors $x = 0)$ ou $(y \neq 0$ et alors $\underbrace{\sqrt{n} = \frac{x}{y}}_{\text{impossible car } \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}})$

Donc $z = 0 \iff y = x = 0$

ⓑ $z = z' \iff z - z' = 0 \iff (x - x') = 0$ et $(y - y') = 0$ d'après q ②ⓐ

donc $z = z' \iff x = x'$ et $y = y'$

④ • f est bien une application qui va de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$

• Montrons que f est un morphisme d'anneaux :

Soient $z = x + y\sqrt{n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ et $z' = x' + y'\sqrt{n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$

$f(z+z') = (x+x') - (y+y')\sqrt{n} = (x - y\sqrt{n}) + (x' - y'\sqrt{n}) = f(z) + f(z')$

$f(zz') = (xx' + nyy') - (xy' + yx')\sqrt{n} = f(z)\, f(z')$ car

$f(z) f(z') = (x - y\sqrt{n})(x' - y'\sqrt{n}) = xx' - xy'\sqrt{n} - x'y\sqrt{n} + yy'n$

et $f(1) = f(1 + 0\sqrt{n}) = 1 - 0\sqrt{n} = 1$

• De plus $f\circ f = id_{\mathbb{Z}[\sqrt{n}]}$ donc f est involutive donc elle est bijective

Concl : f est un automorphisme de $(\mathbb{Z}[\sqrt{n}], +, \times)$

⑤ ⓐ $\varphi(zz') = (zz')(\overline{zz'}) \underset{q3}{=} (zz')(\bar{z}\bar{z'}) = (z\bar{z})(z'\bar{z'}) = \varphi(z)\ \varphi(z')$

ⓑ Si $z = x + y\sqrt{n}$ alors $\varphi(z) = x^2 - ny^2 \in \mathbb{Z}$

$\varphi(z) = 0$ ssi $(y = 0$ et alors $x = 0)$ ou $(y \neq 0$ et alors $\underbrace{\sqrt{n} = \left|\frac{x}{y}\right|}_{\text{impossible car } \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}})$

Concl : $\varphi(z) = 0 \iff z = 0$

ⓒ • Soit $z = 0$. z n'est pas inversible pour $\times$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ et $\varphi(z) = 0$ donc $|\varphi(z)| \neq 1$

• Soit $z \neq 0$

z inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ ssi $\frac{1}{z} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$

or $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\varphi(z)} = \frac{x}{\varphi(z)} - \frac{y}{\varphi(z)}\sqrt{n}$ donc

z inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ ssi $\frac{x}{\varphi(z)} \in \mathbb{Z}$ et $\frac{y}{\varphi(z)} \in \mathbb{Z}$

Donc si z inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ alors

$\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \left(\frac{x}{\varphi(z)} - \frac{y}{\varphi(z)}\sqrt{n}\right)\left(\frac{x}{\varphi(z)} + \frac{y}{\varphi(z)}\sqrt{n}\right) = \frac{x^2}{(\varphi(z))^2} - \frac{y^2}{(\varphi(z))^2} n \in \mathbb{Z}$

or $\underbrace{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}_{\in \mathbb{Z}} \times \underbrace{\varphi(z)}_{\in \mathbb{Z}} \underset{5ⓐ}{=} \varphi\left(\frac{1}{z} \times z\right) = \varphi(1) = 1$ donc $\varphi(z) \in \{-1, +1\}$ donc $|\varphi(z)| =$

Réciproquement, si $|\varphi(z)|=1$ alors $\varphi(z)=\pm 1$ et comme $x\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}$, $\frac{x}{\varphi(z)}\in\mathbb{Z}$ et $\frac{y}{\varphi(z)}\in\mathbb{Z}$

Donc z est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.

5 d) Si $z\,|\,z'$ alors $\exists\, z_1\in\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ tq $z'=z_1 z$

D'après 4 a) $\varphi(z')=\varphi(z_1)\varphi(z)$ et $\varphi(z_1)\in\mathbb{Z}$

donc $\varphi(z)\,|\,\varphi(z')$.

Ex 3 : limites et continuité

1 a) Soit $x\neq 0$. $\frac{\pi}{x}-1<\left\lfloor\frac{\pi}{x}\right\rfloor\leq\frac{\pi}{x}$ donc $\pi-x<x\left\lfloor\frac{\pi}{x}\right\rfloor\leq\pi$ 0,25 0,25

0,5

donc $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\frac{\pi}{x}\right\rfloor=\pi$. De plus, sinus est continue en π 0,25 0,25

donc $\sin\left(\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\frac{\pi}{x}\right\rfloor\right)=\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(x\left\lfloor\frac{\pi}{x}\right\rfloor\right)=\sin\pi=0$ 0,25

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ et g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0)=0$. 0,25

1 b) Soit $x>0$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

on a une forme indéterminée du type 1^∞. On lève cette forme indéterminée en passant à l'exponentielle.

Si $x>0$ $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

on pose $X=\frac{1}{x}$ lorsque $x\to+\infty$, $X\to 0$

$\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)-\ln 1}{X}=\ln'(1)=\frac{1}{1}=1$ car ln est dérivable en 1

taux d'accroissement

donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^1=e$ car exp est continue en 1.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}=e}$$

1) c) Soit $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1) c) i) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée et $x \mapsto x^2$ a pour limite 0 en 0.

Donc f admet une limite en 0 qui vaut 0 or $f(0) = 0$

donc <u>f est continue en 0</u>

1) c) ii) Soit $x \in \mathbb{R}^*$ $\quad \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = x \sin \dfrac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

par le même argument : produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0

Donc f <u>est dérivable en 0</u> et $f'(0) = 0$

1) c) iii) . f <u>est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$</u> en tant que produit et composée de fonctions $\mathcal{C}^1$.

. f est-elle $\mathcal{C}^1$ en 0 ? il faut étudier si f' est continue en 0.

D'une part $\forall x \neq 0 \quad f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{-1}{x^2}$

$$\forall x \neq 0 \quad f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'autre part $f'(0) = 0$.

Déterminons si f' admet pour limite 0 en 0.

Si f' admettait pour limite 0 en 0 alors

$\forall (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f'(u_n) = 0$.

or si on prend $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, alors (u_n) CV vers 0

mais $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f'(u_n) = \dfrac{1}{n\pi} \sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1$

Donc $(f'(u_n))$ est une suite cste égale à -1.

Donc $(f'(u_n))$ CV vers -1 contradiction

donc f' n'admet pas pour limite 0 en 0

donc f' n'est pas continue en 0

donc f n'est pas $\mathcal{C}^1$ en 0

donc f <u>n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$</u>

Exercice 2 (q2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x)+f(y)$.

(a) $f(0+0) = f(0) = f(0)+f(0)$ donc $\underline{f(0)=0}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x+(-x)) = f(0)$ et $f(x+(-x)) = f(x)+f(-x)$ donc $0 = f(x)+f(-x)$

donc $f(-x) = -f(x)$. $\underline{f \text{ est impaire}}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{P}(n)$: " $f(nx) = nf(x)$ ".

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie

- initialisation : si $n=0$ alors $f(nx) = f(0x) = f(0) = 0$
et $nf(x) = 0f(x) = 0$ $\quad$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie

- supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{P}(n)$ vraie
alors $f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx)+f(x) \underset{HR}{=} nf(x)+f(x) = (n+1)f(x)$.
donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

- concl : $\underline{\forall n \in \mathbb{N} \quad f(nx) = nf(x)}$.

Soit $\underline{n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}}$ alors $-n \in \mathbb{N}$

$f(nx) = f(-(-nx)) \underset{q1}{=} -f(-nx) \underset{-n \in \mathbb{N}}{=} -(-n)f(x) = \underline{nf(x)}$.

(c) Soit $r \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$.

$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) \underset{q2}{=} p\, f\left(\frac{1}{q}\right)$ D'autre part $f\left(q \times \frac{1}{q}\right) = f(1) \underset{q2}{=} q \times f\left(\frac{1}{q}\right)$

Donc $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{f(1)}{q}$

Ainsi $f\left(\frac{p}{q}\right) = p \times f\left(\frac{1}{q}\right) = p \times \frac{f(1)}{q} = \frac{p}{q} f(1)$ donc $\underline{f(r) = r \times a \text{ avec } a = f(1)}$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\underline{\mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R}}$, il existe une suite CV (r_n) de rationnels de limite x.

on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(r_n) = r_n \times a$. $\quad (*)$

et f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(r_n) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} r_n\right) = f(x)$.

Par passage à la limite dans $(*)$ on obtient $f(x) = x \times a$.

$\underline{\text{Concl : } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax}$.