

TD 15 : Continuité sur un intervalle

- ▶ Exercice 1 : Soit f et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ des applications continues sur un intervalle I et telles que pour tout $x \in I$, $(f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0$. Montrer qu'on a soit $f = g$ soit $f = -g$. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus f et g continues ? Si I est un domaine quelconque ? Si f peut s'annuler ?
- ▶ Exercice 2 : Soient f et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des applications continues et telles que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > g(x)$. Montrer l'existence d'un réel $\lambda > 0$ tel que $f(x) \geq g(x) + \lambda$ sur $[a, b]$. Le résultat subsiste-t-il si on omet la condition de continuité ? Si on se place sur $]a, b[$?
- ▶ Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. f atteint-elle nécessairement ses bornes ?
- ▶ Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et admettant pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$. Montrer que f présente un minimum.
- ▶ Exercice 5 : Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et continue en 0 et en 1 et telle que $f(x^2) = f(x)$. Démontrer que f est constante.
- ▶ Exercice 6 : Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrer que l'équation $f(x + \frac{1}{p}) = f(x)$, où $p \in \mathbb{N}^*$, a au moins une racine.
- ▶ Exercice 7 : Trouver $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x)f(y)$.
- ▶ Exercice 8 : Trouver $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$.
- ▶ Exercice 9 : Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ continue vérifiant $f \circ f = Id$. Déterminer f .
- ▶ Exercice 10 : Soit f et g deux fonctions continues, définies sur $[0, 1]$. On pose, pour tout x réel, $\phi(x) = \sup_{t \in [0, 1]} (f(t) + xg(t))$. Démontrer que ϕ est lipschitzienne sur $[0, 1]$. Que peut-on en déduire ?