

TD 14 : Arithmétique

► Exercice 1 : Equation diophantienne

1. Déterminer l'entier $d = 495 \wedge 147$ et deux entiers relatifs u et v tels que $147u + 495v = d$.
2. Déterminer un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $147x_0 + 495y_0 = 12$.
3. En déduire tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $147x + 495y = 12$.

► Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de 10^{10^n} par 7.

► Exercice 3 : Soit un entier $a \geq 2$ et $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $n|m$ ssi $(a^n - 1)|(a^m - 1)$.

► Exercice 4 : Soit $n \geq 2$.

1. Vérifier que pour tout $2 \leq k \leq n$, $n! + k$ n'est pas un nombre premier.
2. En déduire qu'il existe des intervalles de $\mathbb{N}$ de longueur aussi grande que l'on veut formés uniquement de nombres non premiers.

► Exercice 5 : On considère la suite de Fibonacci (F_n) définie par :

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$.
2. En déduire le PGCD de F_n et de F_{n+1} .

► Exercice 6 : Prouver que pour tout $s \in \mathbb{Z}$, $s^{19} \equiv s[N]$ lorsque $N \in \{2, 3, 7, 19\}$.
En déduire que $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $m^{19}n = n^{19}m[798]$.

► Exercice 7 : Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:

1. $3x \equiv 1[7]$
2. $3x \equiv 1[12]$
3. $x^2 + 7x + 1 \equiv 0[9]$

► Exercice 8 : Montrer qu'un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

► Exercice 9 : Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

1. Montrer que si a et b sont premiers entre eux alors $a \vee b = ab$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(ka) \vee (kb) = k(a \vee b)$.