

Chapitre 15 : Fonctions continues sur un intervalle

Soit I un intervalle non réduit à un élément.

1 Définition. Ensemble $\mathcal{C}(I)$

Définition 1 (Fonction continue sur I).

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

On dit que f est **continue sur I** ssi f est continue en tout point $x_0 \in I$, ssi

$$\forall x_0 \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

► Exemple : $\text{id}_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

Toute fraction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

Toute fonction trigonométrique est continue sur son ensemble de définition.

Les fonctions $\ln$ et $\exp$, $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \geq 0$ sont continues sur leur ensemble de définition. **Notation** : On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou plus simplement $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{R}$.

Propriété 1 (Restriction d'une fonction continue).

Soit $f \in \mathcal{C}(I)$ et $J \subset I$. La restriction de f à J est continue sur J .

Ainsi, si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors la restriction de f à tout intervalle de $\mathbb{R}$ est continue.
La réciproque de la propriété est fausse.

2 Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle

Propriété 2 (Structure de $\mathcal{C}(I)$).

$x \mapsto 1 \in \mathcal{C}(I)$. Si f et g appartiennent à $\mathcal{C}(I)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors les fonctions $f + g$, λf et fg sont continues sur I .

On en déduit que $(\mathcal{C}(I), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{C}(I), +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \times)$.

Démonstration : $x \mapsto 1 \in \mathcal{C}(I)$ et si f et g appartiennent à $\mathcal{C}(I)$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$, $f + g$, fg , αf appartiennent à $\mathcal{C}(I)$.

► Exemple : On appelle fonction lipschitzienne définie sur I toute fonction f définie sur I à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que $\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Par exemple la fonction valeur absolue est 1-lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne définie sur I est continue sur I .

Propriété 3 (fonctions continues sur I obtenues à partir de deux fonctions continues f et de g).

Si $f \in \mathcal{C}(I)$, $|f| \in \mathcal{C}(I)$.

Si f ne s'annule pas sur I , $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}(I)$. Si f et g appartiennent à $\mathcal{C}(I)$, $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ appartiennent à $\mathcal{C}(I)$.

Pour le dernier point, on utilise le fait que $\sup(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}$ et que $\inf(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$.

Propriété 4 (Composée de deux fonctions continues).

Soit $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, avec I et J deux intervalle non réduits à un élément. Si f est continue sur I et g continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I .

Propriété 5 (Prolongement par continuité).

Soit $I =]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Si f est une application continue sur I telle que $\lim_b f$ existe et vaut $l \in \mathbb{R}$ alors f se prolonge en une application continue $\tilde{f}$ sur $]a, b]$ en posant $\tilde{f}(b) = l$. On dit qu'on a alors prolongé f par continuité en b .

3 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

Théorème 1 (Théorème des valeurs intermédiaires).

Soit I un intervalle et f continue sur I .
Soient $a, b \in I$, $a < b$, si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors $\exists c \in [a, b]$, $f(c) = y$.

Principe de démonstration par dichotomie.

On peut aussi dire que pour tout $(a, b) \in I^2$, toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes par f .

Propriété 6 (Image d'un intervalle par une fonction continue).

Soit I un intervalle et f continue sur I .
 $\forall (\alpha, \beta) \in (f(I))^2$ tel que $\alpha \leq \beta$, $[\alpha, \beta] \subset f(I)$.
Autrement dit, l'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle.

Propriété 7 (Propriété de Cauchy).

Soit f une application définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $a, b \in I$ sont tels que $a < b$ et $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists c \in]a, b[$, $f(c) = 0$.

Conséquence 1 : Si f est continue sur I et ne s'annule pas sur I alors f garde un signe constant sur I .

Conséquence 2 : Equation $f(x) = 0$ sur I avec f continue sur I .

Si $\exists (a, b) \in I^2$, $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ alors $\exists c \in]a, b[$, $f(c) = 0$.

► Exemple : f est continue de $[a, b]$ vers $[a, b]$. Montrer que f admet un **point fixe**¹.

► Exemple : Soient f et g continues sur $[a, b]$ telles que $f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$. Existe-t-il $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = f(c)$?

Propriété 8 (Cas d'une fonction strictement monotone sur un intervalle).

Soit I un intervalle et f continue et strictement monotone sur un intervalle I .
Soient $a, b \in I$, $a < b$, si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors $\exists ! c \in [a, b]$, $f(c) = y$.

L'unicité vient du fait qu'une fonction strictement monotone est injective.

Propriété 9 (Théorème des bornes atteintes).

Soit I un intervalle fermé et borné (segment $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$) et f une fonction continue sur I . Alors $f(I)$ est bornée.
De plus les bornes sont atteintes.

On retiendra que toute fonction définie sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

En résumé, si f est continue sur $[a, b]$, alors $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tels que $f([a, b]) \subset [m, M]$ et m et M sont atteintes. En

1. on appelle point fixe pour f tout réel c appartenant à l'ensemble de définition de f tel que $f(c) = c$, c'est-à-dire tout réel qui annule la fonction $x \mapsto f(x) - x$ ou aussi toute solution réelle de l'équation $f(x) - x = 0$.

revanche, si l'on n'a pas l'information que I est fermé borné alors si f est continue sur I et si $m = \inf_{x \in I} f(x) \in \bar{\mathbb{R}}$ et $M = \sup_{x \in I} f(x) \in \bar{\mathbb{R}}$, alors $]m, M[\subset f(I) \subset [m, M]$.

Une manière simple de montrer que la borne supérieure d'une fonction est atteinte est de montrer que la fonction est définie sur un segment et que sur ce segment elle est continue.

Propriété 10 (Image d'un segment par une fonction continue).

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Remarque 1. Attention la propriété 9 est fausse si I est borné non fermé (exemple : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, 1[$).

Elle est fausse aussi si I est fermé non borné (exemple : $f : x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$, ou $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[1, +\infty[$).

Examiner $f(I)$ dans le cas où $f : x \mapsto \sin x$ et successivement $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $I =]-\frac{\pi}{2}, \pi[$ et $I =]-\frac{\pi}{2}, 2\pi[$. Retenir que si I n'est pas un segment, tout est possible pour $f(I)$.

4 Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue sur un intervalle I soit une bijection de I vers $f(I)$

Théorème 2.

Soit f une fonction continue sur I (intervalle non réduit à un élément).

1. *f est bijective de I vers $f(I)$ ssi f est strictement monotone ssi f est injective sur I .*

2. *Dans ce cas f^{-1} est continue sur $f(I)$ et strictement monotone variant dans le même sens que f .*

(On dit que f est un homéomorphisme de I vers $f(I)$).

$f(I)$ est un intervalle d'après le TVI.

Pour le 1. il reste à montrer que si f est injective alors f est strictement monotone puisque la réciproque a été vue dans la propriété 8.

Pour le 2. il s'agit de montrer que si $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction monotone alors si $g(I)$ est un intervalle, g est continue sur I . Preuve admise.

► Exemple : les bijections réciproques de $\cos$, $\sin$, $\tan$, sh , ch et th sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs.

► Méthode : Pour montrer qu'une fonction est une bijection de I sur J , dresser le tableau de variation de la fonction, évoquer sa continuité et sa stricte monotonie puis conclure que f réalise une bijection de I sur $f(I) = J$. Huit cas se présentent selon la monotonie de f et la nature de I : si f est strictement croissante :

- si $I = [a, b]$, f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$,
- si $I = [a, b[$, f réalise une bijection de $[a, b[$ sur $[f(a), \lim_b f[$,
- si $I =]a, b]$, f réalise une bijection de $]a, b]$ sur $] \lim_a f, f(b)]$,
- si $I =]a, b[$, f réalise une bijection de $]a, b[$ sur $] \lim_a f, \lim_b f[$.

et si f est strictement décroissante :

- si $I = [a, b]$, f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$,
- si $I = [a, b[$, f réalise une bijection de $[a, b[$ sur $] \lim_b f, f(a)]$,
- si $I =]a, b]$, f réalise une bijection de $]a, b]$ sur $[f(b), \lim_a f[$,
- si $I =]a, b[$, f réalise une bijection de $]a, b[$ sur $] \lim_b f, \lim_a f[$,

où $a < b$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

► Exemple : Soit $f : x \mapsto 1 - 2 \cos x$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. $f([-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]) = ?$

5 Continuité uniforme

Définition 2 (Continuité uniforme).

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est uniformément continue sur I lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, (|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon).$$

Propriété 11 (Fonctions lipschitziennes).

Soit f une fonction continue sur I . Si f est lipschitzienne sur I alors elle est uniformément continue sur I .

Exemple :

$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème 3 (Théorème de Heine).

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

6 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Notation : On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ ou plus simplement $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{C}$.

Propriété 12 (Structure de $\mathcal{C}(I)$).

$x \mapsto 1 \in \mathcal{C}(I)$ et si f et g appartiennent à $\mathcal{C}(I)$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$, $f + g$, fg , αf appartiennent à $\mathcal{C}(I)$. Ainsi, $(\mathcal{C}(I), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{C}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{C}(I), +, \cdot)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{C}), +, \cdot)$.

► Exemples :

1. une fonction polynôme à coefficients complexes est continue sur $\mathbb{R}$.
2. si $f \in \mathcal{C}(I)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, f^n est continue sur I .
3. si $f \in \mathcal{C}(I)$ alors $e^f : I \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto e^{f(x)}$ est continue sur I . En effet, $e^f = e^{\operatorname{Re} f} \cos(\operatorname{Im} f) + ie^{\operatorname{Re} f} \sin(\operatorname{Im} f)$ d'où la continuité de e^f d'après les opérations sur les fonctions réelles.
4. une fraction rationnelle à coefficients complexes est continue sur tout intervalle où elle est définie.

Propriété 13 (Théorème des bornes atteintes).

Toute fonction complexe continue sur un segment est bornée.