Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{N}^{*4}$ l'équation $n^x + n^y = n^z$.
2. Soit a un entier naturel non nul.
   (a) Montrer que si $a^n - 1$ est premier alors $a = 2$ et n est premier.
   (b) Montrer que si $a^n + 1$ est premier, avec $n \geq 1$ et $a \geq 2$ alors a est pair et n est une puissance de 2. Cette condition est-t-elle suffisante ?
   (c) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que $k \neq 0 \Rightarrow F_n \wedge F_{n+k} = 1$.

Exercice 2

Les questions 4 et 5 sont facultatives.
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On suppose que $G \neq \{0\}$.

1. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ a une borne inférieure, que l'on note α dans la suite.
2. On suppose dans cette question que $\alpha > 0$.
   (a) Supposons que $\alpha \notin G$. Montrer qu'il existe alors $x_1 \in G$ tel que $\alpha < x_1 < 2\alpha$ puis qu'il existe $x_2 \in G$ tel que $\alpha < x_2 < x_1$. En déduire une contradiction et donc que $\alpha \in G$.
   (b) Montrer que $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.
   (c) Soit $x \in G$. En considérant l'élément $x - \alpha \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor$, montrer que $x \in \alpha\mathbb{Z}$. Que peut-on en déduire pour G ?
3. On suppose dans cette question que $\alpha = 0$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.
   Montrer qu'il existe $x \in G$ tel que $0 < x < b - a$ et que $x \left(1 + \left\lfloor \frac{a}{x} \right\rfloor\right) \in]a, b[\cap G$.
4. Déduire de tout ce qui précède qu'un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$.
5. Montrer que chacun de ces ensembles est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ et dire dans chaque cas si ce sous-groupe est dense ou s'il est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$:
   (a) $\mathbb{Q}$
   (b) $\sqrt{2}\mathbb{Z}$
   (c) $\{n + 2m\pi,\ (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$
   (d) $\left\{\frac{p}{2^n},\ (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$

Exercice 3

1. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction racine carrée est uniformément continue sur $[0, a]$.
2. Montrer que la fonction racine carrée est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que la fonction racine carrée n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.
4. Que dire de l'uniforme continuité de l'application réciproque d'une fonction uniformément continue ?