TD15 - exo 6 et 9 -

exo 6

Le cas $p = 1$ est trivial, nous supposerons donc $p \geq 2$.
Utilisons la fonction $g : x \mapsto f(x + \frac{1}{p}) - f(x)$, définie dans l'indication :

$$\begin{cases} g(0) = f(\frac{1}{p}) - f(0) \\ g(\frac{1}{p}) = f(\frac{2}{p}) - f(\frac{1}{p}) \\ \dots \\ g(\frac{k}{p}) = f(\frac{k+1}{p}) - f(\frac{k}{p}) \\ \dots \\ g(\frac{p-1}{p}) = f(1) - f(\frac{p-1}{p}) \end{cases}$$

On somme toutes ces égalités : $\sum_{k=0}^{p-1} g(\frac{k}{p}) = f(1) - f(0) = 0$.

Deux cas se présentent alors :

- Supposons qu'il existe $k \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $g(\frac{k}{p}) = 0$. Ce réel $\frac{k}{p}$ répond au problème.
- Supposons maintenant que pour tout $k \in \{0, \dots, p-1\}$, $g(\frac{k}{p}) \neq 0$. La somme de ces nombres étant nulle, l'un au moins est strictement positif et l'un au moins est strictement négatif. La fonction g change donc de signe sur $[0, \frac{p-1}{p}]$. On en conclut, de part la continuité de g, que cette fonction s'annule au moins une fois et on a le résultat.

exo 9

Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ telle que $f\circ f = id_{\mathbb{R}^+}$

f est bijective et continue sur $[0,+\infty[$.

Comme elle est injective et continue sur $[0,+\infty[$, elle est strictement monotone sur $[0,+\infty[$.

Supposons qu'elle soit strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

alors $\forall x \geq 0$, $x > 0 \Rightarrow f(0) > f(x)$

Soit $y \in \mathbb{R}^+$ tq $y > f(0)$ alors $\forall x \geq 0$, $y > f(x)$

donc $\forall x \geq 0$, $y \neq f(x)$

Donc y n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}^+$

Ceci contredit le fait que f est surjective de $[0,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$

Donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) < x$.

Alors $f(f(x)) < f(x)$ donc $f\circ f(x) < f(x) < x$

or $f\circ f(x) = x$ donc $x < f(x) < x$ absurde.

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) > x$

alors $f(f(x)) > f(x)$ donc $x > f(x) > x$ absurde.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $f(x) = x$.

Concl : $f = id_{\mathbb{R}^+}$