Chapitre 16 : Matrices

Introduction

La recherche d'une méthode systématique de résolution d'un système linéaire à n lignes et p inconnues par l'algorithme du pivot de Gauss nous a conduit à faire des calculs sur des matrices, tableaux à n lignes et $p+1$ colonnes (matrices augmentées). Cette formulation matricielle nous a paru puissante et simple à utiliser. Dans ce chapitre nous allons découvrir d'autres calculs sur les matrices et obtenir des exemples fondamentaux d'anneaux. Ici, les matrices sont étudiées en soi (en tant que tableau) ; nous verrons plus tard que l'on peut aussi les étudier en liaison avec les vecteurs et les applications linéaires.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1 Ensembles de matrices

1.1 Définitions

Définition 1 (Matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbb{K}$).

On appelle matrice à n lignes et p colonnes sur $\mathbb{K}$ une application $M : [1,n] \times [1,p] \to \mathbb{K},\ (i,j) \mapsto m_{ij}$.
On note $M = (m_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 2 (Matrice ligne, matrice colonne).

Une matrice à 1 ligne et à p colonnes est appelée matrice ligne.
Une matrice à n lignes et à 1 colonne est appelée matrice colonne.

Définition 3 (Matrice élémentaire).

Soient $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$. On appelle matrice élémentaire et on note E_{ij} la matrice
$$\begin{array}{c c} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Propriété 1 (Toute matrice est combinaison linéaire de matrices élémentaires).

Soit $M = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
$$M = \sum_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p} a_{ij} E_{ij}.$$

1.2 Opérations sur les matrices

Définition 4 (Somme de deux matrices et produit par un scalaire).

Soient $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$.
On définit la somme des matrices M_1 *et* M_2 *comme suit :*
Si $M_1 = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$ *et* $M_2 = (b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$*, alors*
$M_1 + M_2 = (a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$.
On définit le produit de α *par* M_1 *comme suit :*
Si $M_1 = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$*, alors* $\alpha M_1 = (\alpha a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$.

Définition 5 (Matrice nulle, opposé d'une matrice).

La matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})}$.
$\forall M = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$,
$-M = (-a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$.

Remarque 1. $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), +)$ *est un groupe commutatif et* $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), +, .)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Définition 6 (Produit de deux matrices).

Soit $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Soit $A = (a_{ki})_{1\leq k\leq m,\ 1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$.
On définit alors $A \times B = (c_{kj})_{1\leq k\leq m,\ 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K})$ *avec*
$c_{kj} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ij} = a_{k1}b_{1j} + a_{k2}b_{2j} + \cdots + a_{kn}b_{nj}$.

Voici comment poser le produit $A \times B$:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} . & b_{1j} & . \\ . & b_{2j} & . \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ . & b_{nj} & . \end{pmatrix} & = B \\ A = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ . & . & . & . \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & c_{kj} & . \\ . & . & . \end{pmatrix} & = A \times B \end{array}$$

. Le produit de A par B est possible ssi le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B.

► Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.

Remarque 2. *Si* X *est une matrice colonne,* AX *est une combinaison linéaire des colonnes de* A.
La j*ème colonne de* AB *est le produit de* A *par la* j*ème colonne de* B *et la* i*ème ligne de* AB *est le produit de la* i*ème ligne de* A *par* B.

Propriété 2 (Associativité du produit matriciel).

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$*,* $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ *et* $C \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$.
$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

Propriété 3 (Distributivité du produit matriciel).

$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$,
$(A_1 + A_2) \times B = A_1 \times B + A_2 \times B$.

Propriété 4 (Bilinéarité de $(M,N) \mapsto M \times N$).

$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \forall(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{K}^2$,
$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) \times B = \alpha_1 A_1 \times B + \alpha_2 A_2 \times B$.
$\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), \forall B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \forall(\beta_1,\beta_2) \in \mathbb{K}^2$,
$A \times (\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2) = \beta_1 A \times B_1 + \beta_2 A \times B_2$.

Propriété 5 (Existence de diviseurs de zéro).

Il existe des matrices non nulles dont le produit est nul : ($\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).

Propriété 6 (Produit de deux matrices élémentaires).

Soit $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $E_{k,\ell} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i\ell}$, *où* $\delta_{i,k}$ *est le symbole de Kronecker.*

S'essayer au produit matriciel d'une matrice avec une matrice élémentaire à gauche et à droite en supposant que les tailles des matrices rendent possible le produit matriciel étudié.

Définition 7 (Transposition).

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. *On appelle* ***transposée de*** A *et on note* ${}^tA$ *ou* A^T : $A^T = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ *tels que* $b_{ij} = a_{ji}$.
Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$. *Les lignes de* A *deviennent colonnes de* A^T *et les colonnes de* A *deviennent lignes de* A^T.

Propriété 7 (Transposée d'une somme, d'un produit par un scalaire).

Soient $(m,n,p) \in \mathbb{N}^{*3}$. $\forall A, B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}$,
$(A+B)^T = A^T + B^T$.
$(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

Propriété 8 (Transposée d'un produit).

Soient $(m,n,p) \in \mathbb{N}^{*3}$. $\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$,
$(A \times B)^T = B^T \times A^T$.

1.3 Cas des matrices carrées

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes (matrices carrées d'ordre n) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque 3 (Pour plus tard)**.** $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Propriété 9 (Loi de composition interne).

$\times$ *est une Loi de composition interne dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: *si* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *alors* $A \times B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 8 (Matrice identité).

On appelle matrice identité d'ordre n *la matrice* $I_n = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ecrire I_1, I_2 et I_3.

Remarque 4. *Attention, le produit matriciel n'est pas commutatif.*

► Exemple : : Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 10.

$(\mathcal{M}_n, +, \times)$ *est un anneau **non commutatif**.*

Définition 9 (Puissance d'une matrice).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$.
On appelle puissance kème de A et on note A^k la matrice définie par :
si $k \neq 0$, $A^k = A \times A \times \cdots \times A$ (k facteurs),
$A^0 = I_n$.

Matrice nipoltente

Propriété 11 (Formule du binôme de Newton).

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $A \times B = B \times A$ (c'est-à-dire tels que A et B commutent).

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

L'hypothèse de la commutativité est essentielle ici. Prendre par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour s'en convaincre.

1.4 Matrices particulières

Définition 10 (Matrices diagonales).

*On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble $\{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$. Cet ensemble est appelé ensemble des matrices **diagonales**.*

Propriété 12 (Stabilité de l'ensemble $D_n(\mathbb{K})$ par les opérations $+$, $.$ et $\times$).

Toute combinaison linéaire de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.
Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale. Deux matrices diagonales commutent.

Définition 11 (Matrices triangulaires supérieures).

On note $T_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble $\{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid i > j \Rightarrow a_{ij} = 0\}$.
*Cet ensemble est appelé ensemble des matrices **triangulaires supérieures**.*
Si $M \in T_n^+(\mathbb{K})$, $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Propriété 13 (Stabilité de l'ensemble $T_n^+(\mathbb{K})$ par les opérations $+$, . et $\times$).

Toute combinaison linéaire de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

► Exemple : Trouver deux matrices triangulaires supérieures dont les produits ne commutent pas.

Définition 12 (Matrices triangulaires inférieures).

On note $T_n^-(\mathbb{K})$ *l'ensemble* $\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid i < j \Rightarrow a_{ij} = 0\right\}$.
Cet ensemble est appelé ensemble des matrices ***triangulaires inférieures****.*
Si $M \in T_n^-(\mathbb{K})$, $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

$\forall (A,B) \in T_n^-(\mathbb{K}),\ A^T, B^T \in T_n^+(\mathbb{K})$ donc $B^T A^T \in T_n^+(\mathbb{K})$ et $(AB)^T \in T_n^+(\mathbb{K})$ d'où $AB \in T_n^-(\mathbb{K})$. Conclusion :

Propriété 14 (Stabilité de l'ensemble $T_n^-(\mathbb{K})$ par les opérations $+$, . et $\times$).

Toute combinaison linéaire de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure. Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

Définition 13 (Matrice scalaire).

On appelle ***matrice scalaire*** *toute matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *de la forme :*
$M = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$, *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$.

1.5 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 14 (Matrices symétriques et antisymétriques).

On note $S_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^T = M\}$ *l'ensemble des matrices* ***symétriques****.*
On note $A_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^T = -M\}$ *l'ensemble des matrices* ***antisymétriques****.*

Propriété 15.

Toute combinaison linéaire de deux matrices symétriques est une matrice symétrique.
Toute combinaison linéaire de deux matrices antisymétriques est une matrice antisymétrique.

2 Groupe linéaire des matrices carrées

Définition 15 (Caractérisation d'une matrice inversible).

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *alors* M *est* ***inversible*** *ssi il existe* $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tel que* $M \times N = N \times M = I_n$. N *est alors appelée matrice inverse de* M *et notée* M^{-1}.

Définition 16 (Groupe linéaire).

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est appelé* ***groupe linéaire*** *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et noté* $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 16 (inverse d'un produit, d'une transposée).

Si $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $A \times B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.
Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et on a $({}^tA)^{-1} =^t (A^1)$. On note cette matrice ${}^tA^{-1}$.

3 Systèmes linéaires

3.1 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Soit $S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$

S est un **système linéaire de n équations à p inconnues**.
Les a_{ij} et les b_k sont des paramètres et $x_1, \cdots, x_p$ sont les inconnues.
Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, si A est la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,
alors X est appelée **l'inconnue**, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, est appelée la **matrice du système** et B **le second membre du système** S.
L'équation $(E) : AX = B$ est l'équation matricielle associée au système S. La **matrice augmentée du système** S est le tableau noté $(A|B)$ qui a n lignes et $p+1$ colonnes.

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & | & b_2 \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & | & b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$$

Lorsque $n = p$, on dit que le système est **carré**. Lorsque $B = 0$, on dit que S est **homogène** ; sinon, on lui associe le système homogène S_0 :
$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$.
L'équation $AX = 0_{n,1}$ est l'équation matricielle associée au système S_0.
On appelle **solution** de S tout p-uplet $(x_1, ..., x_p)$ vérifiant chacune des n équations de S.
On appelle **solution** de E toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ qui rend vraie l'égalité de (E).

Rappel : résoudre un système linéaire, c'est trouver toutes les solutions du système.
Lorsque S possède au moins une solution, on dit que S est **compatible**. Sinon il est **incompatible**.
Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
▶ Exemple : Préciser la matrice, le second membre, la matrice augmentée du système
$S = \begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ x + y + 4z = -9 \\ 7x + 5y + z = 14 \end{cases}$.

3.2 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système

Définition 17 (Opérations élémentaires).

On appelle ***opération élémentaire sur les lignes*** *d'un système linéaire l'une de sopérations suivantes :*
- *échange des lignes i et j, opération notée $L_i \leftrightarrow L_j$,*
- *multiplication de la ligne i par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul, opération notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$,*
- *ajout de λ fois la ligne j à la ligne i ($i \neq j$), opération notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$*

Remarque 5. *On définit et on note à l'identique les opérations sur les colonnes d'une matrice.*

Définition 18 (Systèmes équivalents. Matrices équivalentes par lignes).

On dit que deux systèmes S et S' sont équivalents lorsque l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.
On dit que deux matrices A et A' sont équivalentes par lignes lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note alors $A \sim_L A'$.

Propriété 17.

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Propriété 18.

Si l'on passe d'un système S à un autre système S' par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de S' s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de S.

Ce résultat justifie la présentation matricielle de la résolution d'un système linéaire.

4 Echelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Définition 19.

Une matrice à n lignes et p colonnes est dite échelonnée par lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
- *si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi,*
- *à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*

On appelle ***pivot*** *le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.*
Une matrice échelonnée en lignes est dite ***échelonnée réduite par lignes*** *si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.*

▶ Exemples :voici une matrice échelonnée par lignes : $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et une matrice échelonnée réduite par lignes : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Propriété 19.

1. *Il est possible, par des opérations élémentaires sur les équations, de transformer tout système linéaire S en un système linéaire échelonnée et équivalent à S.*
2. *Il est possible de transformer toute matrice en une matrice échelonnée équivalente.*
3. *Toute matrice est équivalente à une unique matrice échelonnée réduite par ligne.*

C'est l'item 1 de cette propriété qui permet la résolution du système linéaire. Sa démonstration se fait par récurrence sur le nombre d'équations du système.
On transforme le système initial S en un nouveau système S' dont la matrice est une matrice échelonnée (méthode du pivot de Gauss). S' et S sont donc équivalents. Le système S' est simple à résoudre en "remontant par substitutions".
On appelle **rang du système** S le nombre de pivots de S'. Deux cas de figures se présentent alors :

— le nombre d'équations n est supérieur au rang du système r. Les $n-r$ dernières équations, dont le premier membre est nul, sont appelées **équations secondaires**. Si le second membre de ces équations secondaires n'est pas nul, il n'y a pas de solution et le système n'est pas compatible. Si le second membre de ces équations secondaires est nul alors le système est compatible. On a besoin de $p-r$ inconnues appelées **inconnues secondaires ou paramètres** pour décrire l'ensemble des solutions. Pour cela, on exprime les r inconnues principales en fonction des $p-r$ inconnues secondaires,

— le nombre d'équations n est égal au rang du système r, auquel cas on obtient une unique solution.

4.1 Description de l'ensemble des solutions

Propriété 20.

Soit un système compatible (E) : $AX = B$ et X_0 une solution particulière de ce système. Les solutions de E sont les matrices qui s'écrivent $X_0 + X$, où X est une solution du système homogène associé $AX = 0_{n,1}$.

4.2 Interprétation des opérations linéaires en termes de produits matriciels

Propriété 21.

Faire une opération élémentaire sur les lignes de M revient à multiplier M à gauche par une matrice carrée inversible (donc de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$).

Démonstration : on montre que

1. Echanger les lignes j et k de M revient à multiplier M à gauche par la matrice C, obtenue en échangeant dans I_p les lignes j et k, appelée **matrice de permutation**. On écrit $L_j \leftrightarrow L_k$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*$, remplacer L_j par αL_j revient à multiplier M à gauche par la matrice C, obtenue en multipliant dans I_p la j^{ieme} ligne par α, appelée **matrice de dilatation**. On écrit $L_j \leftarrow \alpha L_j$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*$, remplacer L_j par $L_j + \alpha C_k$ revient à multiplier M à gauche par la matrice C, obtenue en ajoutant dans I_p α fois la k^{ieme} ligne à la j^{ieme} ligne, appelée **matrice de transvection**. On écrit $L_j \leftarrow L_j + \alpha L_k$

Propriété 22 (Opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice).

On dit que deux matrices A et A' sont équivalentes par colonnes lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les colonnes. On note alors $A \sim_C A'$.
Faire une opération élémentaire sur les colonnes de A revient à multiplier A à droite par une matrice carrée inversible (donc de $\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$).

Propriété 23.

Une opération élémentaire sur les lignes de M est une opération élémentaire sur les colonnes de ${}^tM$.

► Exemple : Décomposer la matrice rectangulaire $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ en un produit de la forme $A = ER$ où R est échelonnée réduite par lignes et E est un produit de matrices élémentaires. Recommencer avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Propriété 24 ().

Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

5 Calcul d'inverse

Propriété 25.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
- *A est inversible,*
- *$A \sim_L I_n$,*
- *Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. $AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$,*
- *Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, admet une unique solution.*

Méthode 1 : méthode du pivot de Gauss. Principe : par des opérations élémentaires sur les lignes on transforme la matrice A en la matrice I_n (on peut toujours le faire dans le cas où A est inversible).
$\underbrace{C_k \times C_{k-1} \times \cdots \times C_1}_{=A^{-1}} \times A = I_n$ donc
$A^{-1} = C_k \times C_{k-1} \times \cdots \times C_1 \times I_n$.
En faisant simultanément sur I_n les mêmes opérations que sur A, quand on a transformé A en I_n, on a transformé I_n en A^{-1}.
Méthode 2 : méthode par résolution d'un système. Principe : $A \sim_L I_n$.

▶ Exemple : Inverser $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ par deux méthodes : méthode du pivot de Gauss et résolution d'un système linéaire.

Remarque 6. *On peut y arriver aussi en faisant des opérations sur les colonnes, mais attention :* ***on ne peut pas combiner les deux !***

Propriété 26 (CNS d'inversibilité d'une matrice triangulaire).

Toute matrice triangulaire est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont non nuls. Son inverse est alors une matrice triangulaire (avec des coefficients diagonaux inverses.

Cas particulier des matrices diagonales.
Cas particulier des matrices carrées d'ordre 2.

6 Application du calcul matriciel : étude de suites récurrentes

Soient $(a, b) \in \mathbb{K}$. Soit u la suite définie par récurrence par : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où $u_0, u_1 \in \mathbb{K}$.

On pose $\begin{cases} u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \\ u_{n+1} = 1u_{n+1} + 0u_n \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{ssi} & \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} & . \\ \text{ssi} & X_{n+1} & = & A & \times & X_n & \end{array}$$

Par récurrence $X_n = A^n \times X_0 = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$.

▶ Exemple : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
▶ Exemple : $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$, où $u_0, u_1, u_2 \in \mathbb{K}$
▶ Exemple : $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$. En particulier, étudier $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n - 3v_n \end{cases}$, avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.