TD 16 cor

Exercice 5

2) on raisonne par récurrence. Soit P_n : " $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tq $M^n = a_n M + b_n I_3$ "

initialisation : si $n = 0$ alors $M^0 = I_3 = 0M + 1 I_3$

donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$

hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq P_n vraie et mq P_{n+1} vraie. $M^{n+1} = M^n M \overset{HR}{=} (a_n M + b_n I_3) M = a_n M^2 + b_n M$

$= a_n (M + 2I_3) + b_n M = (a_n + b_n) M + 2a_n I_3$

donc a_{n+1} existe et $a_{n+1} = a_n + b_n$ et b_{n+1} existe et $b_{n+1} = 2a_n$

Concl : $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n vraie

De plus pour tout $n \geq 0$ on a $a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$

Donc (a_n) est une suite réc lin d'ordre 2 et $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$

(puisque $M^1 = M = 1M + 0I_3$)

Ainsi après calculs on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = \frac{1}{3} 2^n + \frac{1}{3}(-1)^{n+1}$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $b_n = 2a_{n-1} = \frac{1}{3} 2 \times 2^{n-1} + \frac{2}{3}(-1)^n = \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)$

et cette formule est vraie aussi pour $n = 0$ car $b_0 = 1$.

Exercice 7

Soit $A = (a_{ij})$ et $D = (d_{ij})$. On sait que si $i \neq j$, $d_{ij} = 0$

Intéressons-nous au coefficient d'indices p et q ($p^{ième}$ ligne et $q^{ième}$ colonne)

de AD : $\sum_{k=1}^{n} a_{pk} d_{kq} = a_{pq} d_{qq}$ car si $k \neq q$ $d_{kq} = 0$

de DA : $\sum_{k=1}^{n} d_{pk} a_{kq} = d_{pp} a_{pq}$ car si $k \neq p$ $d_{pk} = 0$

Si $AD = DA$ alors $\forall (p,q) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{pq} d_{qq} = d_{pp} a_{pq}$

cad $\forall (p,q) \in [\![1, n]\!]^2$ $a_{pq} (d_{qq} - d_{pp}) = 0$

or les termes diagonaux de D sont 2 à 2 distincts donc si $p \neq q$ $d_{qq} - d_{pp} \neq 0$

donc si $p \neq q$ $a_{pq} = 0$

On a montré que A était diagonale

Exercice 8

on obtient $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{8}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$ (voir modèle dans le cours)

Exercice 9

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ et $A^2 + 2A = 3I_3$

Donc $A(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I_3) = (\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I_3)A = I_3$

Donc A est inversible d'inverse

$A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I_3$

3) Comme A est inversible,

$AX = B$ ssi $X = A^{-1}B$

ssi $X = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Donc $S = \left\{ \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}$

EX6 TD16 cor

(1)

$$I_3+A = \begin{pmatrix}1&-c&b\\c&1&-a\\-b&a&1\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-cL_1\\ L_3\leftarrow L_3+bL_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&-c&b\\0&1+c^2&-a-bc\\0&a-bc&1+b^2\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow \frac{1}{1+c^2}L_2\\ \text{car } 1+c^2\neq 0}}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&-c&b\\0&1&\frac{-a-bc}{1+c^2}\\0&a-bc&1+b^2\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-(a-bc)L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&-c&b\\0&1&\frac{-a-bc}{1+c^2}\\0&0&\frac{1+a^2+b^2+c^2}{1+c^2}\end{pmatrix}$$

car $1+b^2-(a-bc)\dfrac{(-a-bc)}{1+c^2} = \dfrac{(1+b^2)(1+c^2)+(a-bc)(a+bc)}{1+c^2}$
$= \dfrac{1+b^2+c^2+\cancel{b^2c^2}+a^2-\cancel{b^2c^2}}{1+c^2}$

et $\dfrac{1+a^2+b^2+c^2}{1+c^2}\neq 0$ car $1+a^2+b^2+c^2 > 0$

Donc I_3+A est inversible

On montre de même que I_3-A est inversible (en posant $c'=-c$ et $b'=-b$ et $a'=-a$).

(2) $(I_3+A)^T = I_3^T + A^T = I_3 - A$ car $A\in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

$(I_3-A)^T = I_3^T - A^T = I_3-(-A) = I_3+A$ car $A\in\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Les deux matrices sont les transposées l'une de l'autre.

(3)

$$\begin{aligned} M^T M &= \left((I_3-A)(I_3+A)^{-1}\right)^T (I_3-A)(I_3+A)^{-1}\\ &= \left((I_3+A)^{-1}\right)^T (I_3-A)^T(I_3-A)(I_3+A)^{-1}\\ &= \left((I_3+A)^T\right)^{-1}\left[(I_3+A)(I_3-A)\right](I_3+A)^{-1}\\ &= (I_3-A)^{-1}\left[(I_3-A)(I_3+A)\right](I_3+A)^{-1}\\ &= \left[(I_3-A)^{-1}(I_3-A)\right]\left[(I_3+A)(I_3+A)^{-1}\right]\\ &= I_3\times I_3 = I_3\end{aligned}$$

par associativité du produit matriciel

$(I_3-A)(I_3+A) = I_3-A^2 = (I_3+A)(I_3-A)$