TD 16 : Matrices

► Exercice 1 : Calculer la puissance n^{ieme} de chacune des matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}x & \mathrm{sh}x \\ \mathrm{sh}x & \mathrm{ch}x \end{pmatrix}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

► Exercice 2 : Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$, la matrice $I_n - N$ est inversible. Déterminer cet inverse.

Application : calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

► Exercice 3 : Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A + B = AB$. Montrer que $A - I_n$ et $B - I_n$ sont inversibles ssi A et B commutent.

► Exercice 4 : Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n antisymétriques. $AB - BA$ et $(AB - BA)^2$ sont-elles symétriques ? antisymétriques ?

► Exercice 5 : Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$, où a est un paramètre réel non nul.

1. Montrer que $M^2 = M + 2I_3$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $M^n = a_n M + b_n I_3$.

► Exercice 6 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$, où a, b et c sont trois réels non nuls.

1. Montrer que $I_3 + A$ et $I_3 - A$ sont inversibles.
2. Calculer les transposées de ces deux matrices. Que remarque-t-on ?
3. On pose $M = (I_3 - A)(I_3 + A)^{-1}$. Montrer que $M^T M = I_3$.

► Exercice 7 : Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les termes diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que si $AD = DA$ alors A est diagonale.

► Exercice 8 : Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

► Exercice 9 : On considère le système $(S) = \left\{ \begin{array}{c} 2x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ -x + 2y = -1 \end{array} \right.$.

1. Ecrire matriciellement le système (S) sous la forme $AX = B$.
2. Calculer $A^2 + 2A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. Résoudre le système (S).