TD14 cor exo 8.

Soit $n \in \mathbb{N}$

il existe $(a_0, a_1, \dots, a_r) \in [\![0,9]\!]^{r+1}$ tq

$$n = a_0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + \dots + a_r \times 10^r$$

or $10 \equiv 1\ [9]$

donc $\forall k \in [\![0,r]\!],\ 10^k \equiv 1\ [9]$

donc $\forall k \in [\![0,r]\!],\ a_k \times 10^k \equiv a_k\ [9]$

donc $\sum_{k=0}^{r} a_k \times 10^k \equiv \sum_{k=0}^{r} a_k\ [9]$

donc $n \equiv \sum_{k=0}^{r} a_k\ [9]$.

Ainsi $n \equiv 0\ [9]$ ssi $\sum_{k=0}^{r} a_k \equiv 0\ [9]$

Concl : un nombre est divisible par 9 ssi $\underbrace{\text{la somme de ses chiffres}}_{= \sum_{k=0}^{r} a_k}$ est divisible par 9.

TD14 ex6 Soit $s \in \mathbb{Z}$

- si $N=2$, mq $s^{19} \equiv s [N]$

on sait d'après le petit th de Fermat que $s^2 \equiv s [2]$
$\Rightarrow (s^2)^2 \equiv s^2 [2] \Rightarrow s^4 \equiv s [2]$
$\Rightarrow (s^4)^2 \equiv s^2 [2] \Rightarrow s^8 \equiv s [2]$
$\Rightarrow (s^8)^2 \equiv s^2 [2] \Rightarrow s^{16} \equiv s [2]$

donc $s^{18} = s^{16} \times s^2$ et $s^2 \equiv s [2]$

donc $s^{18} \equiv s \times s [2]$ donc $s^{18} \equiv s^2 [2]$

donc $s^{19} \equiv s \times s^2 [2]$ donc $\underline{s^{19} \equiv s [2]}$

- si $N=3$, mq $s^{19} \equiv s [N]$

on sait d'après le petit th de Fermat que $s^3 \equiv s [3]$

donc $(s^3)^2 \equiv s^2 [3]$ donc $s^6 \equiv s^2 [3]$

donc $(s^6)^3 \equiv (s^2)^3 [3]$ donc $s^{18} \equiv s^6 [3]$ donc $s^{18} \equiv s^2 [3]$

donc $s^{19} = s^{18} \times s$ donc $s^{19} \equiv s^2 \times s [3]$

donc $s^{19} \equiv s^3 [3]$ et $s^3 \equiv s [3]$ donc $\underline{s^{19} \equiv s [3]}$

- Si $N=7$, mq $s^{17} \equiv s [N]$

on sait d'après le petit th de Fermat que $s^7 \equiv s [7]$

donc $(s^7)^2 \equiv s^2 [7]$ donc $s^{14} \equiv s^2 [7]$

donc $s^{19} = s^{14} \times s^5$ donc $s^{19} \equiv s^7 [7]$

or $s^7 \equiv s [7]$ donc $\underline{s^{19} \equiv s [7]}$.

- Si $N=19$, $\underline{s^{19} \equiv s [19]}$ d'après le théorème de Fermat.

On en déduit que : $\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $m^{19}n - n^{19}m \equiv mn - nm [N]$

c-à-d $\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $m^{19}n - n^{19}m \equiv 0 [N]$

pour tout $N \in \{2, 3, 7, 19\}$.

donc $2 \mid m^{19}n - n^{19}m$, $3 \mid m^{19}n - n^{19}m$, $7 \mid m^{19}n - n^{19}m$

et $19 \mid m^{19}n - n^{19}m$

or 2, 3, 7 et 19 sont des nombres premiers 2 à 2 distincts
donc ils sont premiers entre eux 2 à 2
donc par la propriété P8-3 :

$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $2 \times 3 \times 7 \times 19 = 798 \mid m^{19}n - n^{19}m$

donc $\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $\underline{m^{19}n \equiv n^{19}m [798]}$.

TD14 cor ex 5

① Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{P}(n)$: " $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$ ".
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie

- initialisation : si $n=0$ alors $F_1^2 - F_0 F_2 = 1^2 - 0 \times 1 = 1 = (-1)^0$
  donc $\mathcal{P}(0)$ vraie
- hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$
  et mq $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

$$
\begin{aligned}
F_{n+2}^2 - F_{n+1} F_{n+3} &= F_{n+2}^2 - F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+1}) \\
&= F_{n+2}^2 - F_{n+1} F_{n+2} - F_{n+1}^2 \\
&= F_{n+2}(F_{n+2} - F_{n+1}) - F_{n+1}^2 \\
&= -(F_{n+1}^2 - F_{n+2}\underbrace{(F_{n+2} - F_{n+1})}) \\
&= -(F_{n+1}^2 - F_{n+2} \quad F_n \quad) \\
&= -(F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ donc $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$

  donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie
- conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie.

② Soit $d_n = F_n \wedge F_{n+1}$

on a donc $d_n | F_n$ et $d_n | F_{n+1}$

donc $d_n | F_{n+1}^2$ et $d_n | F_n F_{n+2}$

donc $d_n | F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2}$

donc $d_n | (-1)^n$. Or $d_n \in \mathbb{N}$ car F_n et F_{n+1} sont des élts de $\mathbb{N}$

donc $d_n = 1$

Conclusion : $F_n \wedge F_{n+1} = 1$