TD15 ex 10 cor Soit $x \in \mathbb{R}$

$t \mapsto f(t) + x g(t)$ est définie et continue sur $[0,1]$

Donc elle est bornée et atteint ses bornes.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x)$ existe donc φ est définie sur $\mathbb{R}$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $t_x \in [0,1]$ tq $\varphi(x) = f(t_x) + x g(t_x)$

De plus, comme g est continue sur $[0,1]$, elle est bornée sur $[0,1]$

donc $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq M$.

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

On a $\varphi(y) - \varphi(x) = f(t_y) + y g(t_y) - (f(t_x) + x g(t_x))$

or $f(t_y) + x g(t_y) \leq f(t_x) + x g(t_x) = \varphi(x)$

car $\varphi(x) = \sup\limits_{t \in [0,1]} (f(t) + x g(t))$ donc $-(f(t_x) + x g(t_x)) \leq -(f(t_y) + x g(t_y))$

Ainsi $\varphi(y) - \varphi(x) \leq f(t_y) + y g(t_y) - (f(t_y) + x g(t_y))$

$$= f(t_y) - f(t_y) + y g(t_y) - x g(t_y)$$

$$= (y-x) g(t_y) \overset{(*)}{\leq} |(y-x) g(t_y)| \overset{(\Delta)}{\leq} M|y-x|$$

De plus $\varphi(x) - \varphi(y) \leq M |y-x|$ (même raisonnement)

donc
$$\left.\begin{array}{l} \varphi(y) - \varphi(x) \leq M |y-x| \\ -(\varphi(y) - \varphi(x)) \leq M |y-x| \end{array}\right\} \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(x)| \leq M |y-x|$$

Donc φ est M- lipschitzienne !

$(*)$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq |x|$

(Δ) car $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^2$, $|XY| \leq |X||Y|$

TD15 cor exo 8 supposons résolu l'exo 7

- Soit f une solution de l'Éq de l'exo 7
alors $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; f(x+y) = f(x)f(y)$.
Posons $g = f-1$. $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
Mq g est sol de l'Éq de l'exo 8.
Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x+y) = f(x+y)-1$ f sol de l'Éq de l'exo 7
$= f(x)f(y)-1$
$= (1+g(x))(1+g(y)) -1$
$= 1+g(x)+g(y)+g(x)g(y) -1$
$= g(x)+g(y)+g(x)g(y)$
donc g est sol de l'Éq de l'exo 8.

- Réciproquement, Soit g une sol de l'Éq de l'exo 8
Posons $f = 1+g$. Puisque $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Mq f est sol de l'Éq de l'exo 7
Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = 1+g(x+y)$
$= 1+g(x)+g(y)+g(x)g(y)$
$= (1+g(x))(1+g(y))$
$= f(x)\,f(y)$.
donc f est sol de l'Éq de l'exo 7.

- Ainsi, puisque l'ensemble des sol de l'Éq de l'exo 7 est : $\{x \mapsto a^x,\ a>0\} \cup \{x \mapsto 0\}$, l'ens des sol de l'Éq de l'exo 8 est :
$\{x \mapsto a^x-1,\ a>0\} \cup \{x \mapsto -1\}$.

Ex 7 cor TD15

$f(0+0) = f(0) = f(0) \times f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou 1

$f(0+1) = f(0) \times f(1) = f(1)$ donc $f(1)(1 - f(0)) = 0$

* Plaçons nous dans le cas où $f(1) = 0$

alors $f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) f(-1) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x+0) = f(x)\underbrace{f(0)}_{=0}$

Donc f est la fonction nulle.

* Plaçons nous dans le cas où $f(1) \neq 0$. Alors $f(0) = 1$.

- Par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " $f(n) = [f(1)]^n$ "
  - initialisation : si $n = 0$ alors $f(0) = 1$ et $f(1)^0 = 1$
  - hérédité : supposons que pour un rang $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie et mq $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

    $f(n+1) = f(n) \times f(1) \overset{HR}{=} f(1)^n \times f(1) = (f(1))^{n+1}$

    donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie
  - Concl $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie

- Soit $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ alors $-n \in \mathbb{N}^*$

  $f(n + (-n)) = f(0) = 1$ donc $f(n) f(-n) = 1$

  donc $f(n) = \frac{1}{f(-n)} = \frac{1}{f(1)^{-n}} = f(1)^n$ car $f(-n) \neq 0$ puisque $f(-n) = f(1)^{-n}$ avec $f(1) \neq 0$. et $-n > 1$.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$

$f(1) = f(p \times \frac{1}{p}) = (f(\frac{1}{p}))^p$ donc $f(\frac{1}{p}) = (f(1))^{\frac{1}{p}}$

- Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}^*$

  $f(\frac{n}{p}) = (f(\frac{1}{p}))^n = (f(1)^{\frac{1}{p}})^n = f(1)^{\frac{n}{p}}$

  donc $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = f(1)^r$

- Soit $x \in \mathbb{R}$ Comme $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (r_n) réelle tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $r_n \in \mathbb{Q}$ et (r_n) CV vers x

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(r_n) = f(1)^{r_n}$

Par passage à la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} f(r_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(1)^{r_n}$

or f est continue sur $\mathbb{R}$ et exp cont sur $\mathbb{R}$

donc $f(\lim\limits_{n \to +\infty} r_n) = e^{\lim\limits_{n \to +\infty} r_n \ln(f(1))}$

donc $f(x) = e^{x \ln(f(1))} = f(1)^x$

Réciproquement : $x \mapsto a^x$ convient avec $a > 0$ et $x \mapsto 0$ aussi

Concl : $S = \{x \mapsto a^x, a > 0\} \cup \{x \mapsto 0\}$