DM8 cor MPSI

Ex1 ① Soit $(n,x,y,z)\in\mathbb{N}^*$

$n^x>0$ et $n^y>0$ donc $n^x<n^z$ et $n^y<n^z$ donc $x<z$ et $y<z$

- Supposons que $x<y$

$n^x+n^y=n^z \Rightarrow n^x=n^z-n^y \Rightarrow n^x=n^x(n^{z-x}-n^{y-x})$

$\Rightarrow \underbrace{n^x}_{n^x\neq 0}(1-n^{z-x}+n^{y-x})=0 \Rightarrow 1=n^{z-x}-n^{y-x}$

$\Rightarrow n\mid 1$ puisque $1=n(\underbrace{n^{z-x-1}-n^{y-x-1}}_{\in\mathbb{N}})$

$\Rightarrow n=1$

or $\forall(x,y,z)\in\mathbb{N}^{*3}$, $1^x+1^y\neq 1^z$ puisque $1^x=1^y=1^z=1$

Contradiction

- Supposons que $y<x$: de la même manière on arrive à une contradiction (x et y ont des rôles symétriques)

- Supposons que $y=x$

alors $n^x+n^y=n^x+n^x=2n^x=n^z$

donc $2=n^{z-x}$

donc $n\mid 2$ donc $n=1$ ou 2 or $n=1$ impossible

donc $n=2$ et $z-x=1$ donc $z=x+1$

Concl: si $n^x+n^y=n^z$ alors $n=2$, $x=y$ et $z=x+1$

Réciproquement, $\forall x\in\mathbb{N}^*$ $2^x+2^x=2^{x+1}$

Concl: $\mathcal{S}=\{(2,x,x,x+1),\ x\in\mathbb{N}^*\}$.

② Soit $a\in\mathbb{N}^*$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$

ⓐ $a^n-1=(a-1)(1+a+a^2+\dots+a^{n-1})$

Comme $1+a+a^2+\dots+a^{n-1}>1$

et comme a^n-1 est premier, ses diviseurs sont 1 et a^n-1

et donc $1+a+a^2+\dots+a^{n-1}=a^n-1$ et $a-1=1$ donc $a=2$

Si $n=1$ alors $a^n-1=a-1=2-1=1$ n'est pas premier.

Supposons $n\geqslant 2$. Montrons que si n est non premier alors a^n-1 est non premier (on raisonne par contraposée).

Si n n'est pas premier alors on peut écrire $n=pq$ avec $p\geqslant 2$ et $q\geqslant 2$.

$2^n-1=(2^p)^q-1=\underbrace{(2^p-1)}_{>1}\underbrace{\sum_{k=0}^{q-1}(2^p)^k}_{>1}$ donc 2^n-1 n'est pas premier

Ainsi on a mq si n n'est pas premier, 2^n-1 ne l'est pas non plus.
Concl: a^n-1 premier $\Rightarrow$ $a=2$ et n premier.

② ⓑ Soit $n\geq 1$ et $a\geq 2$. On suppose que a^n+1 est premier

- Si a est impair, alors a^n est impair et donc a^n+1 est pair et $a^n+1\geq 2^1+1$ donc a^n+1 est pair strictement supérieur à 2 donc a^n+1 est non premier. Contradiction
- On suppose donc que a est pair

n peut s'écrire $n=2^k(2l+1)$ (on a regroupé tous les facteurs premiers impairs de n).
avec $k\geq 0$ et $l\geq 0$

$$a^n+1=a^{2^k(2l+1)}+1=\left(a^{2^k}\right)^{2l+1}-(-1)^{2l+1}=\underbrace{\left(a^{2^k}+1\right)}_{>1}\sum_{i=0}^{2l}(-1)^{2l-i}\left(a^{2^k}\right)^i$$

or a^n+1 est premier donc n'admet comme diviseur que 1 et a^n+1
donc $a^{2^k}+1=a^n+1$ donc $a^{2^k}=a^n$ donc $e^{2^k\ln a}=e^{n\ln a}$
donc $2^k\ln a=n\ln a$ donc $2^k=n$

Concl: a^n+1 premier $\Rightarrow$ a pair et n est une puissance de 2

Cette condition n'est pas suffisante : la réciproque est fausse
$8^2+1=65$ n'est pas premier alors que 8 est pair et que $n=2^1$

② ⓒ Soit $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{N}^*$

$$F_{n+k}=2^{2^{n+k}}+1=2^{2^n\cdot 2^k}+1=\left(2^{2^n}\right)^{2^k}+1=(F_n-1)^{2^k}+1$$

donc
$$\begin{aligned}F_{n+k}-2&=(F_n-1)^{2^k}-1\\&=\sum_{i=0}^{2^k}\binom{2^k}{i}F_n^i(-1)^{2^k-i}-1\\&=\sum_{i=1}^{2^k}\binom{2^k}{i}F_n^i(-1)^{2^k-i}+\underset{\text{terme correspondant à } i=0}{1}-1\\&=MF_n \text{ avec } M=\sum_{i=1}^{2^k}\binom{2^k}{i}F_n^{i-1}(-1)^{2^k-i}\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

donc si d est un diviseur commun à F_{n+k} et à F_n,
d divise $F_{n+k}-MF_n=2$
donc $d\in\{1,2\}$
Mais $\forall n\in\mathbb{N}$, F_n est impair donc $2\nmid F_n$
donc $d=1$

Conclusion $F_n\wedge F_{n+k}=1$

Ex 2 Soit $(G,+)$ un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ tq $G \neq \{0\}$

① $G \neq \{0\}$ donc il existe $x \in G \cap \mathbb{R}^*$ et comme $(G,+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, $-x \in G \cap \mathbb{R}^*$. Parmi x et $-x$, l'un des deux est strictement positif. Donc $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide et minoré par 0 donc ce sous-ensemble de $\mathbb{R}$ a une borne inférieure d'après la propriété de la borne inférieure. On la note α. On a $\alpha \geq 0$

② ⓐ Comme $\alpha > 0$, $\alpha + \alpha > \alpha$ donc $2\alpha > \alpha$

D'après la caractérisation de la borne inférieure,

$\forall x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$, $x \geq \alpha$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$, $x < \alpha + \varepsilon$.

On choisit $\varepsilon = \alpha$. Ainsi il existe $x_1 \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tq $\alpha \leq x_1 < 2\alpha$

Si $x_1 = \alpha$ alors $\alpha \in G$ or $\alpha \notin G$ donc $x_1 \neq \alpha$.

Ainsi il existe $x_1 \in G$ tq $\alpha < x_1 < 2\alpha$

De même si on choisit $\varepsilon = x_1 - \alpha$

alors il existe $x_2 \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tq $\alpha \leq x_2 < \alpha + (x_1 - \alpha)$

or $\alpha \notin G$ donc $x_2 \neq \alpha$ et il existe $x_2 \in G$ tq $\alpha < x_2 < x_1$

Ainsi

$\alpha < x_1 < 2\alpha$ donc $x_1 - x_2 < \alpha$ or $x_2 < x_1$ donc $0 < x_1 - x_2$

$-x_1 < -x_2 < -\alpha$

$\alpha - x_1 < x_1 - x_2 < \alpha$

Ainsi $0 < x_1 - x_2 < \alpha$.

Et comme $(G,+)$ est un groupe, $\left.\begin{matrix} x_1 - x_2 \in G \\ x_1 - x_2 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 - x_2 \in G \cap \mathbb{R}_+^*$

On a donc trouvé un élt de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ strictement inférieur à $\inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) \Rightarrow$ contradiction

Concl: $\alpha \in G$.

② ⓑ Soit $x \in \alpha\mathbb{Z}$. Alors $\exists n \in \mathbb{Z}$ tq $x = n\alpha$

D'après le cours, l'itéré $n^{\text{ième}}$ de α appartient à G pour tout $n \in \mathbb{Z}$, puisque $(G,+)$ est un groupe et que $\alpha \in G$.

Donc $n\alpha \in G$

Concl: $\alpha\mathbb{Z} \subset G$

② ⓒ Soit $x \in G$. On sait que $\alpha > 0$ donc $\alpha \neq 0$.

$\frac{x}{\alpha} - 1 < \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor \leq \frac{x}{\alpha}$ donc $\alpha\left(\frac{x}{\alpha} - 1\right) < \alpha \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor \leq x$

càd $x - \alpha < \alpha \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor \leq x$ donc $-\alpha < \alpha \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor - x \leq 0$

donc $\alpha > -\alpha \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor + x \geq 0$ càd $0 \leq \underset{\in G}{x} - \underbrace{\alpha \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor}_{\in \alpha\mathbb{Z} \subset G} < \alpha$

donc $x - \alpha \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor \in G$

et $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$

donc si $x - \alpha \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ alors $x - \alpha \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor < \alpha$ est impossible

or $x - \alpha \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor \geq 0$ donc $x - \alpha \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor = 0$

donc $x = \alpha \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor$ or $\alpha \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor \in \alpha\mathbb{Z}$ donc $x \in \alpha\mathbb{Z}$ Concl: $G \subset \alpha\mathbb{Z}$

or $\alpha\mathbb{Z} \subset G$ Donc $G = \alpha\mathbb{Z}$

③ $\alpha=0$ Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tq $a<b$

$\alpha=\inf(G\cap\mathbb{R}_+^*)$

donc $\forall x\in G\cap\mathbb{R}_+^*, x\geq\alpha$ et $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in G\cap\mathbb{R}_+^*$ tq $x<\alpha+\varepsilon$

on prend $\varepsilon=b-a$

on obtient : il existe $x\in G\cap\mathbb{R}_+^*$ tq $x<0+b-a$

donc il existe $x\in G$ tq $0<x<b-a$

Comme $x\neq0$, $x>0$, $0<x<b-a \Rightarrow a<b-x \Rightarrow \frac{a}{x}<\frac{b}{x}-1 \Rightarrow \frac{a}{x}+1<\frac{b}{x}$

donc $\frac{a}{x}<\lfloor\frac{a}{x}\rfloor+1\leq\frac{a}{x}+1<\frac{b}{x}$

donc $\frac{a}{x}<\lfloor\frac{a}{x}\rfloor+1<\frac{b}{x}$ donc $a<\underbrace{x\lfloor\frac{a}{x}\rfloor+x}_{=\underset{\in G}{x}\underbrace{(\lfloor\frac{a}{x}\rfloor+1)}_{\in\mathbb{Z}}}<b$

donc $x(\lfloor\frac{a}{x}\rfloor+1)\in G$

et $x(\lfloor\frac{a}{x}\rfloor+1)\in\,]a,b[$

Donc $x(1+\lfloor\frac{a}{x}\rfloor)\in G\cap\,]a,b[$.

④ • Si $\alpha>0$, $G=\alpha\mathbb{Z}$

• Si $\alpha=0$ alors tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient au moins un élément de G donc G est dense dans $\mathbb{R}$.

⑤ ⓐ $(\mathbb{Q},+)$ ss grpe de $(\mathbb{R},+)$ et $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ (vu en cours)

ⓑ $(\sqrt{2}\mathbb{Z},+)$ ss grpe de $(\mathbb{R},+)$ et est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha=\sqrt{2}$

ⓒ Soit $G=\{n+2m\pi,\ (m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$

$G\neq\emptyset$ car $0\in G$ $(0=0+2\times0\times\pi)$

$G\subset\mathbb{R}$

$\forall(x,x')\in G^2, \exists(m,n)\in\mathbb{Z}^2\ \exists(m',n')\in\mathbb{Z}^2$ tq $\begin{cases}x=n+2m\pi\\x'=n'+2m'\pi\end{cases}$ $x-x'=\underbrace{(n-n')}_{\in\mathbb{Z}}+2\underbrace{(m-m')}_{\in\mathbb{Z}}\pi\in G$

Donc $(G,+)$ ss grpe de $(\mathbb{R},+)$

Supposons qu'il existe $\alpha>0$ tq $G=\alpha\mathbb{Z}$

alors $\left.\begin{array}{l}\exists k\in\mathbb{Z}^* \text{ tq } 1=1+0\times2\pi=k\alpha\\ \exists k'\in\mathbb{Z}^* \text{ tq } 2\pi=0+1\times2\pi=k'\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow 2\pi=k'\alpha=k'\times\frac{1}{k}\Rightarrow\pi=\frac{k'}{2k}$

absurde car $\pi\notin\mathbb{Q}$

Concl : G est dense dans $\mathbb{R}$.

ⓓ Soit $G=\{\frac{p}{2^n},\ (p,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\}$

$G\neq\emptyset$ car $0\in G$ $(0=\frac{0}{2^1}$ par ex$)$.

$\forall(x,x')\in G^2, \exists(p,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\ \exists(p',n')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ tq $x=\frac{p}{2^n}$ et $x'=\frac{p'}{2^{n'}}$, $x-x'=\frac{2^{n'}p-2^np'}{2^{n+n'}}\in G$

car $2^{n'}p-2^np'\in\mathbb{Z}$ et $n+n'\in\mathbb{N}$

$G\subset\mathbb{R}$

Donc $(G,+)$ ss grpe de $(\mathbb{R},+)$

De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{2^n}\in G$ donc $\inf(G\cap\mathbb{R}_+^*)$ est telle que $0\leq\alpha\leq\frac{1}{2^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Par passage à la limite on obtient $0\leq\alpha\leq0$ donc $\alpha=0$

Donc G est dense dans $\mathbb{R}$

Exercice 3

1) f est continue sur le segment $[0,a]$ donc d'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue sur $[0,a]$

2) Soit $\varepsilon>0$. On cherche $\eta>0$ tq $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^+$ $|x-y|<\eta \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq\varepsilon$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^{+}_{*}$

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}|\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{|(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

or $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

donc $\exists a>0$ tq $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\geq a \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\leq 2 \Rightarrow \sqrt{x}\geq\frac{1}{2}$

Ainsi, si $x\geq a$ et $y\geq a$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ donc $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leq 1$

et donc si $x\geq a$ et $y\geq a$, $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leq|x-y|$

Par ailleurs, on sait que f est uniformément continue sur $[0,a]$

donc $\exists \eta_1>0$ tq $\forall (x,y)\in[0,a]$, $|x-y|<\eta_1 \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq\frac{\varepsilon}{2}$

On pose alors $\eta=\min(\eta_1,\frac{\varepsilon}{2})$.

En effet si $|x-y|<\eta$,

3 cas possibles:

- alors $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq|x-y|<\eta\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ si $(x,y)\in[a,+\infty[$
- alors $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ si $(x,y)\in[0,a]$
- alors $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \underset{IT}{\leq} |\sqrt{x}-\sqrt{a}|+|\sqrt{a}-\sqrt{y}|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\leq\varepsilon$ si $x\leq a\leq y$

(idem si $y\leq a\leq x$, rôles symétriques de x et de y).

Donc f est uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

3) Autre méthode

on montre que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^{+2}$, $|\sqrt{y}-\sqrt{x}|\leq\sqrt{|y-x|}$ $(*)$

Soit $\varepsilon>0$ On pose $\eta=\varepsilon^2$.

Soient $(x,x')\in\mathbb{R}_+^2$, si $|x-x'|<\eta$ alors $|\sqrt{x'}-\sqrt{x}|\leq\sqrt{|x'-x|}<\sqrt{\eta}=\varepsilon\leq\varepsilon$

Donc $x\mapsto\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,+\infty[$

$(*)$ en 2 temps: - si $y\geq x$, $\sqrt{y}\leq\sqrt{y-x}+\sqrt{x}$ donc $|\sqrt{y}-\sqrt{x}|=\sqrt{y}-\sqrt{x}\leq\sqrt{y-x}=\sqrt{|y-x|}$

- si $x>y$, $|\sqrt{y}-\sqrt{x}|=\sqrt{x}-\sqrt{y}\leq\sqrt{|x-y|}=\sqrt{|y-x|}$.

3) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $K\in\mathbb{R}_+^*$ tq f est K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

Alors $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^{+2}$, $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq K|x-y|$. En particulier $\binom{x>0}{y=0}$:

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ $|\sqrt{x}|=\sqrt{x}\leq K|x|$ càd $\forall x>0$ $\frac{\sqrt{x}}{x}\leq K$ càd $\forall x>0$ $\frac{1}{\sqrt{x}}\leq K$

Or si $x\to0^+$, $\frac{1}{\sqrt{x}}\to+\infty$ Absurde! Donc f n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$

4) La fonction réciproque d'une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ n'est pas nécessairement uniformément continue. En effet on a mq $x\mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ alors que $x\mapsto\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.