Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1 : Réduction de matrice

Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calcul d'une puissance de matrice
   (a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Montrer que $A = PDP^{-1}$ et déterminer D^n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.
   (d) En déduire A^n en fonction de n.
2. Première application : étude de suites imbriquées
   (a) On considère trois suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n - 4c_n \\ b_{n+1} = -2a_n - b_n + 2c_n \\ c_{n+1} = -2a_n + c_n \end{cases}$$

   et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
   (b) En déduire l'expression de U_n en fonction de A, n et U_0. On justifiera cette expression à l'aide d'une récurrence.
   (c) Exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n, a_0 b_0 et c_0.
3. Deuxième application : résolution de l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
   (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ une solution de l'équation $M^2 = A$. Déterminer $\left(P^{-1}MP\right)^2$. En déduire que $N = P^{-1}MP$ commute avec D.
   (b) Montrer que toute matrice qui commute avec D est nécessairement diagonale. On posera pour cela $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et on résoudra l'équation $ND = DN$.
   (c) En déduire la forme de N puis celle de M.
   (d) Conclure en précisant le nombre de solutions de l'équation $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ puis dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : Equation fonctionnelle

Dans cet exercice on cherche à déterminer les fonctions numériques continues définies sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient la relation $(*)$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

1. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xy) = f(x) + f(y)$.
   (a) Calculer $f(1)$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(\frac{1}{x}) = -f(x)$.
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x^n) = nf(x)$.
   (c) Etablir que pour tout $r \in \mathbb{Q},\ f(e^r) = rf(e)$.
   (d) En utilisant un argument de densité, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(e^x) = xf(e)$.
2. Déduire de ce qui précède que l'ensemble des fonctions numériques continues définies sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient la relation $(*)$ est l'ensemble : $\{x \mapsto K\ln(x),\ K \in \mathbb{R}\}$.

3. On cherche maintenant à déterminer les fonctions numériques continues définies sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient la relation $(**)$:
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xy) = xf(y) + yf(x).$$
   (a) Soit f une fonction numérique continue définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifie la relation $(**)$. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ vérifie la relation $(*)$.
   (b) Conclure.

Exercice 3 : Cryptographie

Soit la suite de Fibonacci définie par récurrence par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

0. Calculer les seize premiers termes de cette suite.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1 : quelques propriétés arithmétiques de la suite de Fibonacci

1. On veut montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \wedge u_n = 1$. On précise que $u_{n+1} \wedge u_n$ désigne le PGCD de u_{n+1} et de u_n.
   (a) Soit a et b deux entiers naturels tels que $a \geq b$. Montrer que $a \wedge b = (a - b) \wedge b$.
   (b) Montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \wedge u_n = 1$.
2. On veut montrer que pour tout couple d'entiers (n, m), $u_{n\wedge m} | u_n \wedge u_m$.
   (a) Vérifier que l'énoncé est vrai pour le couple d'entiers $(8, 12)$.
   (b) Démontrer que pour tout couple d'entiers naturels (n, p), $u_{n+p+1} = u_n u_p + u_{n+1} u_{p+1}$. On raisonnera par récurrence double sur l'entier p.
   (c) Montrer par récurrence sur q que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $u_n | u_{qn}$.
   (d) Soit n et m deux entiers naturels. En utilisant la question précédente, montrer que $u_{n\wedge m} | u_n \wedge u_m$.

Partie 2 : étude d'un procédé de cryptage

Le but de cette partie est l'étude d'un procédé de cryptage des lettres majuscules de l'alphabet français. Chacune des 26 lettres est associée à l'un des entiers de 0 à 25, selon le tableau de correspondance suivant.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le cryptage se fait à l'aide d'une clé, qui est un nombre entier k fixé, compris entre 0 et 25. Pour crypter une lettre donnée :
— on repère le nombre x associé à la lettre, dans le tableau de correspondance précédent ;
— on multiplie ce nombre x par la clé k ;
— on détermine le reste r de la division euclidienne de $k \times x$ par 26 ;
— on repère la lettre associée au nombre r dans le tableau de correspondance ; c'est la lettre cryptée.
Par exemple, pour crypter la lettre P avec la clé $k = 11$:
— le nombre x associé à la lettre « P » est le nombre 15 ;
— on multiplie 15 par la clé k, ce qui donne $11 \times 15 = 165$;
— on détermine le reste de 165 dans la division par 26 : on trouve 9 ;
— on repère enfin la lettre associée à 9 dans le tableau : c'est « J ».
Ainsi, avec la clé $k = 11$, la lettre P est cryptée en la lettre J.
On crypte un mot en cryptant chacune des lettres de ce mot.

1. Que penser du cryptage obtenu lorsque la clé k est égale à 1 ?
2. Dans cette question, la clé de cryptage est $k = 11$. Le but de cette partie est de crypter le mot PISE.

(a) Déterminer en quelle lettre est cryptée la lettre I. On détaillera les différentes étapes du processus de cryptage.

(b) Crypter le mot PISE. On ne demande pas le détail du cryptage.

3. Dans cette question, la clé de cryptage est toujours $k = 11$. Le but de cette question est de retrouver une lettre initiale connaissant la lettre cryptée.

(a) Quel est le reste de 19×11 dans la division euclidienne par 26 ?

(b) Une lettre associée à un nombre x a été cryptée. Le nombre associé à la lettre cryptée est noté y.

i. Quel est le reste dans la division euclidienne de $11 \times x$ par 26 ?

ii. Quel est le reste dans la division euclidienne de $19 \times y$ par 26 ?

(c) Ces propriétés montrent que pour décrypter une lettre codée y avec la clé $k = 11$, il suffit de crypter cette lettre avec la clé de cryptage $k' = 19$. Utiliser les résultats précédents pour décrypter le mot RSY.

4. Une clé k ne possède pas forcément une clé de décryptage associée. On dit qu'une clé est une bonne clé de cryptage si elle possède une clé de décryptage associée. On admet qu'une clé k est une bonne clé de cryptage si et seulement si $k \wedge 26 = 1$.

(a) Quels sont les nombres qui sont à la fois des termes de la suite de Fibonacci et de bonnes clés de cryptage ?

(b) Préciser pour chacun une clé de décryptage associée.