# TD 17 : Dérivation des fonctions

► Exercice 1 (ref 1) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable au point $a$. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{xf(a) - af(x)}{x-a}$ admet une limite finie en $a$ et calculer cette limite. Etudier la réciproque.

► Exercice 2 (ref 2) : Prolonger par continuité si besoin chacune des fonctions $f$ définies par les expressions suivantes, puis étudier la régularité de l'application obtenue :

1. $x \mapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x}$
2. $x \mapsto x|x|$
3. $x \mapsto x + a + be^x$ si $x \geq 0$ et $x \mapsto \cos x - x$ si $x < 0$
4. $x \mapsto \sqrt{x} \sin x$ pour $x > 0$ et $x \mapsto x^2$ sinon

► Exercice 3 (ref 4) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que $f$ est bijective.
2. Montrer que sa bijection réciproque, $f^{-1}$, est dérivable et donner $(f^{-1})'(1)$.
3. Montrer que $f^{-1}$ est même deux fois dérivable et donner $(f^{-1})''(1)$.

► Exercice 4 (ref 5) : Calculer la dérivée $n^{ieme}$ pour $n \geq 1$ de chacune des applications définies par les expressions suivantes :

1. $(x-a)^n(x-b)^n$. En déduire la relation $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2$
2. $xe^{2x}$
3. $e^x \cos x$

► Exercice 5 (ref 6) : Polynômes de Legendre.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $L_n$ sur $\mathbb{R}$ par $L_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$.

1. Montrer que $L_n$ est une fonction polynôme dont on précisera degré, coefficient dominant et parité. $L_n$ s'appelle **polynôme de legendre d'ordre** $n$.
2. Montrer que $L_n(1) = 2^n n!$ et donner $L_n(-1)$.
3. Montrer que $x \mapsto (x^2-1)^n$ vérifie l'équation différentielle $(x^2-1)y' - 2nxy = 0$. En déduire que $L_n$ est solution de $(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$.

► Exercice 6 (ref 9) : Soient $a$ et $b$ deux réels. Appliquer l'égalité des accroissements finis à la fonction $f(t) = t^2 + at + b$ entre $x_1$ et $x_2$. On déterminera précisément un point $c \in ]x_1, x_2[$ correspondant. Interpréter graphiquement.

► Exercice 7 (ref 10) : Soient $f$ et $g$ deux applications continues sur $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivables (au moins) en tout point de $]a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$. Que retrouve-t-on pour $g(x) = x$ ?

► Exercice 8 (ref 12) : Soit $f$ dérivable avec $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = l > 0$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

► Exercice 9 (ref 13) : Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$. En déduire le comportement de la suite définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geq 1$. Déterminer de même $\lim_{n \to +\infty} (\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \ln k)$.

▶ Exercice 10 (ref 17) : $f \in \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ est nulle en 0 et dérivable en ce point. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$.

▶ Exercice 11 (ref 20) : Soit $g$ définie par $g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 0 \\ 1 - (\sin \frac{\pi x}{2})^3 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

$g$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ? $g$ admet-elle une dérivée seconde sur $\mathbb{R}$ ?

▶ Exercice 12 (ref 30) : Pour $n \geq 4$, calculer la dérivée d'ordre $n$ de $x \mapsto y = x^3 \sin x$.

▶ Exercice 13 (ref 36) : Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$. Montrer que $g = f\bar{f} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ et que $g' = 2\text{Re}(f'\bar{f})$.

▶ Exercice 14 (ref 37) : Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$. Montrer que $|f|$ est dérivable en tout point où $f$ ne s'annule pas et montrer alors que $|f|' = \frac{\text{Re}(f'\bar{f})}{|f|}$.