TD17 cor

exercice 3

① f est continue sur $\mathbb{R}$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$
(somme de 2 fcts croissantes sur $\mathbb{R}$)
donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[$
puisque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $= \mathbb{R}$

Donc f est bijective

② f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fcts der.
De plus $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = e^x + 1 > 0$ donc f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
Donc f^{-1} est der sur $\mathbb{R}$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

donc $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))}$ or $f^{-1}(1) = 0$ car $f(0) = 1$

Donc $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{e^0 + 1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} = (f^{-1})'(1)$

③ $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ $\forall y \in \mathbb{R}$

Donc $(f^{-1})'$ est l'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ $g : y \mapsto f'(f^{-1}(y))$, composée de 2 fcts der
Donc $(f^{-1})'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

On a $\forall y \in \mathbb{R}, \ g'(y) = f''(f^{-1}(y)) \times (f^{-1})'(y)$

$\forall y \in \mathbb{R}, \ g'(y) = f''(f^{-1}(y)) \times \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Soit $y \in \mathbb{R}$

Donc $(f^{-1})''(y) = \dfrac{-1 \times \dfrac{f''(f^{-1}(y))}{f'(f^{-1}(y))}}{(f'(f^{-1}(y)))^2} = \dfrac{-f''(f^{-1}(y))}{(f'(f^{-1}(y)))^3}$

or $f''(x) = e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc $(f^{-1})''(1) = \dfrac{-e^{f^{-1}(1)}}{(e^{f^{-1}(1)} + 1)^3} = \dfrac{-e^0}{(e^0+1)^3} = \dfrac{-1}{2^3} = -\dfrac{1}{8}$

$(f^{-1})''(1) = -\dfrac{1}{8}$

Ex 4.1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ Soit $n \in \mathbb{N}$

$f : x \mapsto x^n$ est polynomiale donc indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f^{(k)}(x) = \dfrac{n!\, x^{n-k}}{(n-k)!}$ si $0 \leq k \leq n$ et $f^{(k)}(x) = 0$ si $k > n$

De même :

$g : x \mapsto x-a$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $g^{(k)}(x) = \dfrac{n!\, (x-a)^{n-k}}{(n-k)!}$ (Δ)

$h : x \mapsto x-b$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{N}$ $h^{(k)}(x) = \dfrac{n!\,(x-b)^{n-k}}{(n-k)!}$

Comme g et h sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, gh aussi par la formule de Leibniz et

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (gh)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x)\, h^{(n-k)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!\,(x-a)^{n-k}}{(n-k)!}\, n!\, \frac{(x-b)^{n-(n-k)}}{(n-(n-k))!}$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} (x-a)^{n-k} (x-b)^{k}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (gh)^{(n)}(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-a)^{n-k} (x-b)^{k} \quad (*)$$

De plus, si $a = b = 0$ alors $(hg)(x) = x^n \times x^n = x^{2n}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

or d'après $(*)$ $(hg)^{(n)}(x) = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 x^{n-k} x^{k} = n!\, x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ $\forall x$ $\forall n$

et d'après (Δ) ($n \leftarrow 2n$, $k \leftarrow n$) $(hg)^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!\,(x-0)^{2n-n}}{(2n-n)!} = \dfrac{(2n)!\,x^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $n!\, x^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!\, x^n}{n!}$

On prend finalement $x = 1$ et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \binom{2n}{n}$$

TD17

ex 9 (ref 13)

- On applique le TAF à $f = \ln$ sur $[k, k+1]$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, puisque f est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$.

  On obtient : $\exists\, c \in]k, k+1[$ tq $\ln(k+1) - \ln(k) = f'(c)\,(k+1-k) = f'(c)$

  Comme $c \in]k, k+1[$ et comme $f'(c) = \frac{1}{c}$ on a $f'(c) \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right[$

  Donc $\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k}$ donc $\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a donc :

  $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$. On somme ces n inégalités. On obtient :

  $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ or $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$ est télescopique. On obtient donc :

  $\ln(n+1) - \ln(1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) - \ln(1) = +\infty$

  Par comparaison $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n \geq 1}$ DV vers $+\infty$.

- On applique le TAF à $f : x \mapsto \ln(\ln x)$ qui est continue sur $[k, k+1]$ avec $\underset{k \neq 1}{k \in \mathbb{N}^*}$ et dérivable sur $]k, k+1[$

  On obtient : $\exists\, c \in]k, k+1[$ tq $\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) = f'(c)\,(k+1-k)$

  Comme $c \in]k, k+1[$ et comme $f'(c) = \frac{1}{c \ln c}$ on a $f'(c) \in \left]\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}, \frac{1}{k \ln k}\right[$

  Soit $n \geq 2$. Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$ on a donc

  $\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) \leq \frac{1}{k \ln k}$. On somme ces $n-2$ inégalités :

  $$\sum_{k=2}^{n} \left(\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k)\right) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$$

  $$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$$

  Donc $\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}\right)_{n \geq 2}$ DV vers $+\infty$.

TD17 Ex 11

- g est cont sur $\mathbb{R}$
- g est der (et même de classe C^∞) sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$

$\forall x<0,\quad g'(x)=0$

$\forall x\in]0,1[,\quad g'(x)=-\frac{3\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2\cos\frac{\pi x}{2}$

$\forall x>1,\quad g'(x)=0$

$\lim\limits_{x\to0^-} g'(x)=0=\lim\limits_{x\to0^+} g'(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} g'(x)=0=\lim\limits_{x\to1^+} g'(x)$

g est cont en 0 et en 1 et g' admet 0 pour limite en ces points

Donc g est dérivable en ces points avec $g'(0)=g'(1)=0$

$\Rightarrow$ g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par contre g n'a pas de dérivée seconde en 1

car $g''_d(1)\neq g''_g(1)$.

TD17 Ex 12

On pose $h=fg$ où $h: x\mapsto x^3\sin x$

$f: x\mapsto x^3$, $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ en tant que fonction polynomial

$g: x\mapsto \sin x$, $g\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ en tant que fonction trigonométrique.

donc h est $\mathcal{C}^\infty$ en tant que produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$

D'après la formule de Leibniz,

$\forall n\in\mathbb{N}^*\ \forall x\in\mathbb{R},\quad h^{(n)}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)\,g^{(n-k)}(x)$

$h^{(n)}(x)=\binom{n}{0}x^3\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+\binom{n}{1}3x^2\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)+\binom{n}{2}6x\sin\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$
$+\binom{n}{3}\cdot 6\sin\left(x+\frac{(n-3)}{2}\pi\right)$.

Car dériver sin revient à "ajouter $\frac{\pi}{2}$" et : $g^{(j)}(x)=\sin\left(x+j\frac{\pi}{2}\right)$