Exercice 1

On considère la fonction numérique f de la variable x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1. Etudier la continuité à gauche et à droite de f en 0.

2. Etudier la dérivabilité à gauche et à droite de f en 0.

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que
$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}e^{\frac{-1}{x}} \text{ et que}$$
$$P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + [1 - 2(n+1)x]\, P_n(x). \qquad (1)$$

5. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4.

6. Calculer le degré, le coefficient dominant et le terme constant de P_n.

7. On considère la fonction g telle que $g(x) = x^2 f(x)$. Démontrer que $g^{(n+1)} = f^{(n)}$.

8. En utilisant la formule de Leibniz, calculer $g^{(n)}(x)$ et démontrer que
$$P_{n+1}(x) = [1 - 2(n+1)x]\, P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x). \qquad (2)$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par$f(x) = \sqrt{x}e^x$.

1. f est-elle dérivable en 0 ?

2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un intervalle J à préciser.
   On note g la bijection réciproque.

3. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \dfrac{2x}{2x^2 + e^{2g(x)}}$.

4. En utilisant le théorème de la limite de la dérivée, montrer que g est dérivable en 0 et déterminer $g'(0)$.

Exercice 3

Les quatres questions sont indépendantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 comme racine du polynôme $P(X) = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$.
   On pourra pour cela utiliser la propriété 18 du cours.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X-2)^{2n} + (X-1)^n + 1$ par $(X-1)^2(X-2)$.
   On pourra pour cela écrire la division euclidienne puis dériver cette égalité et évaluer les polynômes obtenus en 1.

3. Résoudre les équations d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$ suivantes : $(X^2+1)P'' - 6P = 0$.
   On pourra pour cela étudier le cas où P est le polynôme nul et le cas où P n'est pas le polynôme nul en examinant le coefficient dominant de $6P$ et celui de $(X^2+1)P''$.

4. En utilisant la formule de Taylor, déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(2) = 5$, $P'(2) = -1$, $P''(2) = 1$ et pour tout entier $k \geq 3$, $P^{(k)}(2) = 0$.