DS7 cor - Exercice 1

1 a

$$P=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&1&2&-1&0&1\end{array}\right)\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

P est donc équivalente par lignes à une matrice diagonale inversible donc elle est inversible.

$$P\underset{L_2\leftarrow L_2-L_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&0&1&2&-1\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)\underset{L_1\leftarrow L_1+L_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1&1\\0&1&0&1&2&-1\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)\text{ donc } P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

1 b

$$D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}=P^{-1} \quad \text{donc } PDP^{-1}=A$$

$$P=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&-3\\0&1&3\\-1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4&-4\\-2&-1&+2\\-2&0&1\end{pmatrix}=PDP^{-1}$$

Comme D est diagonale, on peut affirmer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $D^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&1&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}$

1 c Soit $\mathcal{P}(n)$: "$A^n=PD^nP^{-1}$"

initialisation : $A^0=I_3$ et $PD^0P^{-1}=PI_3P^{-1}=PP^{-1}=I_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie

hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$ et mq $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. × est associative

$$A^{n+1}=A^nA\overset{HR}{=}(PD^nP^{-1})(PDP^{-1})=PD^n(P^{-1}P)DP^{-1}=PD^nI_3DP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$$

conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ vraie.

1 d Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$D^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&1&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}=P^{-1}$$

$$P=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0&-3^n\\0&1&3^n\\(-1)^n&1&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n&-(-1)^n+3^n&(-1)^n-3^n\\1-3^n&2-3^n&-1+3^n\\1-3^n&-(-1)^n+2-3^n&(-1)^n-1+3^n\end{pmatrix}=A^n$$

2 a Soit $n\in\mathbb{N}$ $U_{n+1}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}$ et $AU_n=\begin{pmatrix}3&4&-4\\-2&-1&2\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a_n+4b_n-4c_n\\-2a_n-b_n+2c_n\\-2a_n+c_n\end{pmatrix}$

D'après la définition des suites (a_n), (b_n) et (c_n), on a donc $AU_n=U_{n+1}$

2 b Montrons que $\mathcal{P}'(n)$: "$U_n=A^nU_0$" est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par récurrence

initialisation : $U_0=\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}$ et $A^0U_0=I_3U_0=U_0$ donc $\mathcal{P}'(0)$ est vraie

hérédité : supposons que $\mathcal{P}'(n)$ est vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$ et mq $\mathcal{P}'(n+1)$ est vraie

$U_{n+1}=AU_n\overset{HR}{=}AA^nU_0=A^{n+1}U_0$ donc $\mathcal{P}'(n+1)$ vraie

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}'(n)$ vraie.

2 c Soit $n\in\mathbb{N}$

$$U_n\underset{q3}{=}A^nU_0=\begin{pmatrix}3^n&-(-1)^n+3^n&(-1)^n-3^n\\1-3^n&2-3^n&-1+3^n\\1-3^n&(-1)^{n+1}+2-3^n&(-1)^n-1+3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^na_0+((-1)^{n+1}+3^n)b_0+((-1)^n-3^n)c_0\\(1-3^n)a_0+(2-3^n)b_0+(3^n-1)c_0\\(1-3^n)a_0+((-1)^{n+1}+2-3^n)b_0+((-1)^n-1+3^n)c_0\end{pmatrix}$$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$a_n=3^na_0+((-1)^{n+1}+3^n)b_0+((-1)^n-3^n)c_0$$
$$b_n=(1-3^n)a_0+(2-3^n)b_0+(3^n-1)c_0$$
$$c_n=(1-3^n)a_0+((-1)^{n+1}+2-3^n)b_0+((-1)^n-1+3^n)c_0.$$