TD19 cor

Ex 1 Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

- Si P est nul alors $P(X+1) - P(X) = 0$ et a pour degré $-\infty$
- Si $\deg(P) \neq 0$ $\quad P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j \right) - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

le coeff de degré n est : $a_n \binom{n}{n} - a_n = 0$

le coeff de degré $n-1$ est : $a_{n-1}\binom{n-1}{n-1} + a_n \binom{n}{n-1} - a_{n-1} = n a_n \neq 0$

car $a_n \neq 0$ donc $P(X+1) - P(X)$ est de degré $\deg P - 1$ si $\deg P = n \geqslant 1$

Ex 6

$$-5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 1 = (X^2 - 5X + 3)(-5X^2 - 21X - 84) + (-357X + 253)$$

$$X^3 + iX^2 + X = (X - i + 1)(X^2 + (2i-1)X - 3i) + 3(i+1)$$

Ex 8

- $P_1 = (X-1)(X - e^{\frac{2i\pi}{5}})(X - e^{\frac{4i\pi}{5}})(X - e^{\frac{6i\pi}{5}})(X - e^{\frac{8i\pi}{5}})$

$P_1 = (X-1)(X - e^{\frac{2i\pi}{5}})(X - e^{\frac{-2i\pi}{5}})(X - e^{\frac{4i\pi}{5}})(X - e^{-\frac{4i\pi}{5}})$

$P_1 = (X-1)\underbrace{(X^2 - 2\cos\tfrac{2\pi}{5} X + 1)}\underbrace{(X^2 - 2\cos\tfrac{4\pi}{5} X + 1)}$

- Pour P_2 on cherche les racines sixièmes de $-1 = e^{i\pi}$ en résolvant $(re^{i\theta})^6 = e^{i\pi}$ ou en prenant une solution particulière ($e^{\frac{i\pi}{6}}$) et en la multipliant par les racines sixièmes de l'unité (car $z^6 = e^{i\pi}$ ssi $\left(\frac{z}{e^{i\pi/6}}\right)^6 = 1$)

on obtient $P_2 = (X - e^{\frac{i\pi}{6}})(X - e^{\frac{i3\pi}{6}})(X - e^{\frac{i5\pi}{6}})(X - e^{\frac{i7\pi}{6}})(X - e^{\frac{i9\pi}{6}})(X - e^{\frac{i11\pi}{6}})$

$$= (X^2+1)(X^2 - 2\cos\tfrac{\pi}{6} X + 1)(X^2 - 2\cos\tfrac{5\pi}{6} X + 1)$$

$$= (X^2+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$$

- $P_3 = X^9 + X^6 + X^3 + 1 = Q(Y)$ où $Q(Y) = Y^3 + Y^2 + Y + 1$ avec $Y = X^3$

$Q(Y) = (Y - e^{\frac{i\pi}{2}})(Y - e^{i\pi})(Y - e^{\frac{i3\pi}{2}}) = (Y-i)(Y+i)(Y+1)$

car $(Y-1)(Y^3+Y^2+Y+1) = Y^4 - 1$ et $Y^4 - 1 = (Y-1)(Y - e^{\frac{i\pi}{2}})(Y - e^{\frac{2i\pi}{2}})(Y - e^{\frac{3i\pi}{2}})$

Donc $P_3 = (X^3+1)(X^3-i)(X^3+i) = (X^3+1)(X^6+1) = (X^3+1)P_2$

$$= (X+1)(X+j)(X+\bar{j})P_2 = (X+1)(X^2-X+1)P_2$$

- $P_4 = (1-X^2)^3 + (2X)^3$ $\quad a^{2p+1} + b^{2p+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{2p} (-1)^k a^k b^{2p-k}$

$= (1 - X^2 + 2X)((1-X^2)^2 - (1-X^2)2X + 4X^2)$

$= (1 + 2X - X^2)(X^4 + 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1) = (1 + 2X - X^2)((X^2+X)^2 + (X-1)^2)$

$= (1 + 2X - X^2)((X^2+X)^2 - (iX-i)^2) = (1+2X-X^2)(X^2 + (1-i)X + i)(X^2 + (1+i)X - i)$

$P_4 = -(X - 1 - \sqrt{2})(X - 1 + \sqrt{2})(X - \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+i))(X + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}(1+i))(X - \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i))(X + \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1-i))$

Finalement, $P_4 = -(X - 1 - \sqrt{2})(X - 1 + \sqrt{2})(X^2 - (\sqrt{3}-1)X + 2 - \sqrt{3})(X^2 + (\sqrt{3}+1)X + \sqrt{3} + 2)$

Ex 9

ⓐ $P\left(\frac{p}{q}\right)=0 \quad q\neq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{p}{q}\right)^k = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k p^k q^{n-k} = 0$$

ainsi $\left.\begin{array}{l} a_0 q^n = -p \sum_{k=1}^{n} a_k p^{k-1} q^{n-k} \\ p \wedge q = 1 \Rightarrow p\wedge q^n = 1 \end{array}\right] \overset{\text{lemme de Gauss}}{\Longrightarrow} p \mid a_0$

et $\left.\begin{array}{l} a_n p^n = -q \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-1-k} \\ p \wedge q^n = 1 \end{array}\right] \Rightarrow q \mid a_n$

ⓑ $$P\left(\cos\frac{2\pi}{7}\right) = 8\left(\frac{e^{i\frac{2\pi}{7}}+e^{-i\frac{2\pi}{7}}}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{e^{i\frac{2\pi}{7}}+e^{-i\frac{2\pi}{7}}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{e^{i\frac{2\pi}{7}}+e^{-i\frac{2\pi}{7}}}{2}\right) - 1$$

$$= e^{i\frac{6\pi}{7}} + 3e^{i\frac{2\pi}{7}} + 3e^{-i\frac{2\pi}{7}} + e^{-i\frac{6\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + 2 + e^{-i\frac{4\pi}{7}} - 2e^{i\frac{2\pi}{7}} - 2e^{-i\frac{2\pi}{7}} - 1$$

$$= 1 + e^{i\frac{6\pi}{7}} + e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{-i\frac{2\pi}{7}} + e^{-i\frac{6\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{-i\frac{4\pi}{7}}$$

$$= e^{-i\frac{6\pi}{7}}\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{6\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}} + e^{i\frac{10\pi}{7}} + e^{i\frac{12\pi}{7}}\right)$$

$$= e^{-i\frac{6\pi}{7}} \times \left(\frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^7}{1-e^{i\frac{2\pi}{7}}}\right) = 0$$

or les diviseurs de 8 sont $\pm1, \pm2, \pm4$ et ±8 et les diviseurs de -1 : ±1

Si $\cos\frac{2\pi}{7}$ était rationnel, il s'écrirait $\frac{p}{q}$ avec $p\wedge q=1$

et $p=\pm1$ et $q=\pm1$ ou ±2 ou ±4 ou ±8

or ni ±1, ni $\pm\frac{1}{2}$, ni $\pm\frac{1}{4}$, ni $\pm\frac{1}{8}$ ne sont racines de $8X^3+4X^2-4X-1$

Donc $\cos\frac{2\pi}{7}$ n'est pas rationnel

ⓒ Si $\frac{p}{q}$ est racine alors $p\mid -2$ et $q \mid 3$

les seuls rationnels qui peuvent être racines de P sont : $\pm\frac{1}{3}, \pm1, \pm2$ et $\pm\frac{2}{3}$

on vérifie que $\frac{2}{3}$ est racine par le calcul donc $\left(X-\frac{2}{3}\right) \mid P$

$$\begin{array}{l|l} 3X^3+X^2+X-2 & X-\frac{2}{3} \\ \cline{2-2} 3X^3-2X^2 & 3X^2+3X+3 \\ \hline \quad 3X^2+X & \\ \quad 3X^2-2X & \\ \hline \qquad 3X-2 & \\ \qquad 3X-2 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Donc $P = 3\left(X-\frac{2}{3}\right)\underbrace{\left(X^2+X+1\right)}_{\Delta<0}$