

TD 18 : Polynômes

Généralités

- Exercice 1 ref1 : Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré du polynôme $P(X+1) - P(X)$ en fonction du degré de P .
- Exercice 2 ref2 : Montrer que tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle.
- Exercice 3 ref4 : Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \bar{z}$.
- Exercice 4 ref8 : Résoudre les équations d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$ suivantes :
 1. $P'^2 = 4P$.
 2. $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$.

Division euclidienne

- Exercice 5 ref10 : Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $(a, b) \in K^2$ avec $a \neq b$.
 1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$.
 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
 3. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$.
 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X - 2)^{2n} + (X - 1)^n + 1$ par $(X - 1)^2(X - 2)$.
- Exercice 6 ref12 : Effectuez les divisions euclidiennes de A par B lorsque
 1. $A = 1 + 6X^2 + 4X^3 - 5X^4$ et $B = X^2 - 5X + 3$.
 2. $A = X^3 + iX^2 + X$ et $B = X - i + 1$.

Racines et factorisation

- Exercice 7 ref16 : Factoriser $P(X) = 1 - X + \frac{X(X-1)}{2!} - \frac{X(X-1)(X-2)}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{X(X-1) + \dots + (X-n+1)}{n!}$.
- Exercice 8 ref19 : Décomposer en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants : $P_1 = X^5 - 1$, $P_2 = X^6 + 1$, $P_3 = X^9 + X^6 + X^3 + 1$, $P_4 = (1 - X^2)^3 + 8X^3$.
- Exercice 9 ref20 : On considère un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, à coefficients entiers.
 1. Montrer que si un nombre rationnel d'écriture irréductible $\frac{p}{q}$ est racine de $P(X)$, alors p divise a_0 et q divise a_n .
 2. Application 1 : montrer que $\cos \frac{2\pi}{7}$ est racine de $8X^3 + 4X^2 - 4X - 1$ et en déduire que $\cos \frac{2\pi}{7}$ est irrationnel.
 3. Application 2 : trouver la décomposition en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ de $P = 3X^3 + X^2 + X - 2$.
- Exercice 10 ref27 : (d'après Petites Mines)
 1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $Q = X^2 + X + 1$.
 2. Soit m, n, p trois entiers naturels. Démontrer que Q divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$.

3. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme $(X+1)^n + X^n + 1$ est-il divisible par Q ?

► Exercice 11 ref29 : Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 comme racine du polynôme $P(X) = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$.

Relations entre coefficients et racines

► Exercice 12 ref36 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+zx=-13 \\ xyz=-12 \end{cases}$

► Exercice 13 ref38 : Soit $P(X) = X^3 - 3X - 1$ et a, b et c ses racines. Déterminer $a^2 + b^2 + c^2$, $a^3 + b^3 + c^3$, $a^4 + b^4 + c^4$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ et $\frac{1}{(a^3-1)^2} + \frac{1}{(b^3-1)^2} + \frac{1}{(c^3-1)^2}$.

► Exercice 14 ref41 : Soit le polynôme $P = X^3 + pX + Q \in \mathbb{C}[X]$, de racines complexes a, b et c . En calculant le produit $A = P'(a)P'(b)P'(c)$, écrire une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que le polynôme admette une racine double.

Arithmétique

► Exercice 15 ref42 : Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non constants et premiers entre eux. Montrer qu'il existe un unique couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $AU + BV = 1$ et $\deg U < \deg B$ et $\deg V < \deg A$.

► Exercice 16 ref 43 : Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A^2|B^2$. Montrer que $A|B$.