DM9 cor

Exercice 1 $\quad f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

① • Si $x \to 0^-$, $-\frac{1}{x} \to +\infty$, $e^{-\frac{1}{x}} \to +\infty$, $\frac{1}{x^2} \to +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

donc f n'est pas continue à gauche en 0

• Si $x \to 0^+$ on pose $X = -\frac{1}{x}$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} X = -\infty$.

$\lim\limits_{X \to -\infty} X^2 e^X = 0$ par CC donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{X \to -\infty} X^2 e^X = 0$

or $f(0) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ et f est continue à droite en 0

② Comme f n'est pas continue à gauche en 0, f n'est pas dérivable à gauche en 0.

Soit $x > 0$, $\quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{X^2 e^X}{\frac{1}{X}} = X^3 e^X$ en posant $X = -\frac{1}{x}$

Par CC, $\lim\limits_{X \to -\infty} X^3 e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{X \to -\infty} X^3 e^X = 0$

donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

③ f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ en tant que produit et composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$: $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$

$x \mapsto -\frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$

$x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty, 0[$

④ Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{P}(n)$: "$\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}$"

• Initialisation : $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ $\quad \forall x > 0$

donc $\forall x > 0$, $f^{(0)}(x) = \frac{P_0(x)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$, avec $P_0 = 1$

ainsi, $\forall x > 0$, $P_0(x) = 1$.

• hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$

Soit $x > 0$

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)\prime}(x) \underset{HR}{=} \frac{P'_n(x) \times x^{2n+2} - P_n(x)(2n+2)x^{2n+1}}{(x^{2n+2})^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \times \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \left(\frac{P'_n(x)}{x^{2n+2}} - \frac{(2n+2) P_n(x)}{x^{2n+3}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+4}} \right) e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)+2}} e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{où } P_{n+1}(x) = x^2 P'_n(x) + P_n(x)\left[1 - (2n+2)x\right]$$

et $P_{n+1} = X^2 P'_n + P_n[1 - 2(n+1)X] \in \mathbb{R}[X]$ car $P_n \in \mathbb{R}[X]$,

$P'_n \in \mathbb{R}[X]$, $X^2 \in \mathbb{R}[X]$ et $1-2(n+1)X \in \mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ est stable par produit et par combinaisons linéaires.

- Concl : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

(5) on a déjà vu que $P_0 = 1$.

$P_1 = X^2 P'_0 + [1 - 2\times 1 \times X] P_0 = X^2 \times 0 + [1-2X]\times 1 = 1-2X$

$P_2 = X^2 P'_1 + [1-2\times 2 \times X] P_1 = X^2(-2) + [1-4X][1-2X]$

$P_2 = -2X^2 + 1 - 2X - 4X + 8X^2 = 6X^2 - 6X + 1$

$P_3 = X^2 P'_2 + [1-2\times 3\times X] P_2 = X^2(12X-6) + [1-6X][6X^2-6X+1]$

$P_3 = \underline{12X^3} - 6X^2 + 6X^2 - 6X + 1 \underline{-36X^3} + 36X^2 - 6X$

$P_3 = -24X^3 + 36X^2 - 12X + 1$

$P_4 = X^2 P'_3 + [1-2\times 4\times X] P_3 = X^2(-72X^2 + 72X - 12) + [1-8X][-24X^3 + 36X^2 - 12X + 1]$

$P_4 = -72X^4 + 72X^3 - 12X^2 - 24X^3 + 36X^2 - 12X + 1 + 192X^4 - 288X^3 + 96X^2 - 8X$

$P_4 = 120X^4 - 240X^3 + 120X^2 - 20X + 1$.

(6) A la suite de ces calculs on conjecture que
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " P_n est de degré n, a pour coefficient dominant $(-1)^n (n+1)!$ et pour terme constant 1 ".

Montrons-le par récurrence

- initialisation : P_0 est de degré 0, a pour coefficient dominant $1 = (-1)^0 (0+1)!$ et pour terme constant 1 car $P_0 = 1$
- hérédité :

supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$

$P_{n+1} = X^2 P'_n + [1 - 2(n+1)X] P_n$.

Intéressons-nous au terme de plus haut degré de P_{n+1} :

le terme de plus haut degré de P_n est : $(-1)^n (n+1)! X^n$ par HR

le terme de plus haut degré de P'_n est : $(-1)^n (n+1)!\, n X^{n-1}$

Donc le terme de plus haut degré de P_{n+1} est :

$X^2 (-1)^n (n+1)!\, n X^{n-1} - 2(n+1) X (-1)^n (n+1)! X^n$

$= X^{n+1} [(-1)^n (n+1)!\, n - 2(n+1)(-1)^n (n+1)!]$

$= X^{n+1} [(-1)^n (n+1)!] [n - 2(n+1)]$

$= X^{n+1} (-1)^n (n+1)! (-n-2) = X^{n+1} (-1)^{n+1} (n+1)! (n+2)$

$= (-1)^{n+1} (n+2)!\, X^{n+1}$

P_{n+1} est donc un polynôme de degré $n+1$ et de coefficient dominant $(-1)^{n+1} (n+2)!$

Intéressons-nous au terme constant de P_{n+1} : c'est $P_{n+1}(0)$

or $P_{n+1} = X^2 P'_n + [1-2(n+1)X]\, P_n$

donc $P_{n+1}(0) = 0^2 P'_n(0) + [1-2(n+1)0]\, P_n(0)$

$= 0 + 1 \times P_n(0) = P_n(0)$

or le terme constant de P_n est $P_n(0) = 1$ par HR

donc $P_{n+1}(0) = 1$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie.

(7) Soit $x>0$. On a $g(x) = x^2 f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fcts dér

et $\forall x>0$, $g'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = f(x)$.

Ainsi $g' = f$ sur $\mathbb{R}^*$

Or f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ d'après q(3)

Donc g' est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ donc g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $g^{(n+1)} = f^{(n)}$ (récurrence immédiate).

(8) Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geqslant 3$ et $x>0$. D'après la formule de Leibniz,

$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$ où $u : x \mapsto x^2$

on a : $\forall x>0$, $u'(x) = 2x$, $u''(x) = 2$ et $\forall k>2$, $u^{(k)}(x) = 0$

Ainsi $g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{u^{(k)}(x)}_{=0} f^{(n-k)}(x)$

$= \binom{n}{0} u^{(0)}(x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} u'(x) f^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} u''(x) f^{(n-2)}(x)$

$= x^2 f^{(n)}(x) + 2nx f^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 f^{(n-2)}(x)$

$\forall x>0$, $g^{(n)}(x) = x^2 f^{(n)}(x) + 2nx f^{(n-1)}(x) + n(n-1) f^{(n-2)}(x)$ $(*)$

Si $n=0$, $g^{(0)}(x) = g(x) = x^2 f(x)$

Si $n=1$, $g'(x) = f(x)$

Si $n=2$, $g''(x) = f'(x) = \frac{P_1(x)}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1-2x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1-2x}{x^2} f(x)$.

En posant $n = m-1$ dans $(*)$,

On a donc :

$\forall m \geqslant 2, \forall x>0$, $g^{(m+1)}(x) = x^2 f^{(m+1)}(x) + 2(m+1)x f^{(m)}(x) + (m+1)m f^{(m-1)}(x)$

$\forall m \geqslant 2, \forall x>0$, $f^{(m)}(x) = x^2 f^{(m+1)}(x) + 2(m+1)x f^{(m)}(x) + (m+1)m f^{(m-1)}(x)$

$\forall m \geqslant 2, \forall x>0$, $x^2 f^{(m+1)}(x) = [1-2(m+1)x] f^{(m)}(x) - (m+1)m f^{(m-1)}(x)$

$\forall m \geqslant 2$ $\forall x>0$, $x^2 \frac{P_{m+1}(x)}{x^{2(m+1)+2}} e^{-\frac{1}{x}} = [1-2(m+1)x] \frac{P_m(x)}{x^{2m+2}} e^{-\frac{1}{x}} - (m+1)m \frac{P_{m-1}(x)}{x^{2(m-1)+2}} e^{-\frac{1}{x}}$

$\forall m \geqslant 2$ $\forall x>0$, $\frac{P_{m+1}(x)}{x^{2m+2}} = [1-2(m+1)x] \frac{P_m(x)}{x^{2m+2}} - m(m+1) \frac{P_{m-1}(x)}{x^{2m}}$

vérifier que cette relation est vraie lq $m=0$ ou 1 avec q(5).

$\forall m \geqslant 2$, $P_{m+1}(x) = [1-2(m+1)x] P_m(x) - m(m+1)x^2 P_{m-1}(x)$

Exercice 2

① Soit $x>0$. $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}e^x}{x} = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

donc f n'est pas dérivable en 0 et $\mathcal{C}_f$ admet au pt d'abscisse 0 une tangente verticale.

② f est le produit de 2 fonctions strictement croissantes et positives donc f est st^t croissante sur $\mathbb{R}^+$

f est continue sur $\mathbb{R}^+$ en tant que produit de 2 f^ctions continues sur $\mathbb{R}^+$

Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [0,+\infty[= J$

③ f est dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$ en tant que produit de 2 f^ctions dérivables sur $\mathbb{R}^+_*$

$\forall x>0,\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^x + \sqrt{x}e^x = \Big(\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{>0} + \underbrace{\sqrt{x}}_{>0}\Big)\underbrace{e^x}_{>0} > 0$.

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$

et que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+_*$,

g est dérivable sur $J \setminus \{f(0)\} = \mathbb{R}^+_*$

et $\forall x_0 \in \mathbb{R}^+_*,\ g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Ainsi, $\forall y_0 \in \mathbb{R}^+_*,\ g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2\sqrt{g(y_0)}} + \sqrt{g(y_0)}\right)e^{g(y_0)}}$

càd $\forall y_0 \in \mathbb{R}^+_*,\ g'(y_0) = \frac{1}{\frac{1+2g(y_0)}{2\sqrt{g(y_0)}}e^{g(y_0)}} = \frac{2\sqrt{g(y_0)}}{(1+2g(y_0))e^{g(y_0)}}$

$\forall y_0 \in \mathbb{R}^+_*,\ g'(y_0) = \frac{2\sqrt{g(y_0)} \times e^{g(y_0)}}{(1+2g(y_0))\, e^{g(y_0)} \times e^{g(y_0)}}$ par définition de f

$\forall y_0 \in \mathbb{R}^+_*,\ g'(y_0) = \frac{2\ f(g(y_0))}{(1+2g(y_0))\ e^{2g(y_0)}}$

$\forall y_0 \in \mathbb{R}^+_*,\ g'(y_0) = \frac{2y_0}{e^{2g(y_0)} + 2g(y_0)e^{2g(y_0)}}$

$\forall y_0 \in \mathbb{R}^+_*,\ g'(y_0) = \frac{2y_0}{e^{2g(y_0)} + 2\left(\sqrt{g(y_0)}\,e^{g(y_0)}\right)^2}$

$\forall y_0 \in \mathbb{R}^+_*,\ g'(y_0) = \frac{2y_0}{e^{2g(y_0)} + 2\,(f(g(y_0)))^2} = \frac{2y_0}{e^{2g(y_0)} + 2y_0^2}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $g'(x) = \dfrac{2x}{e^{2g(x)} + 2x^2} = \dfrac{2x}{2x^2 + e^{2g(x)}}$

4) $f(0) = 0$ donc $g(0) = 0$.

f est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc g est continue sur $\mathbb{R}^+$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$

$\forall x > 0 \quad g'(x) = \dfrac{2x}{2x^2 + e^{2g(x)}}$

g continue sur $\mathbb{R}^+$ donc en 0

$\lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} 2x^2 = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} e^{2g(x)} = \lim\limits_{y \to 0} e^{2y} = e^0 = 1$.

composition des limites ; $y = g(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

exp continue en 0

Concl : par somme et quotient de limites, $\lim\limits_{x \to 0} g'(x) = \dfrac{0}{0+1} = 0$.

Par le théorème de la limite de la dérivée, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

$\mathcal{C}_g$ admet donc au point d'abscisse 0 une tangente horizontale.

Exercice 3

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(1) = 1-(2n+1)+(2n+1)-1=0$

$P'(X) = (2n+1)X^{2n} - (2n+1)(n+1)X^{n} + n(2n+1)X^{n-1}$

$P'(1) = 2n+1 - (2n^2+2n+n+1) + 2n^2+n = \cancel{2n}+1-\cancel{2n^2}-3n-1+\cancel{2n^2}+\cancel{n} = 0$

• si $n=1$, $P'(X) = 3X^2-6X+3$, $P'(1)=0$

$P''(X) = 6X-6$ donc $P''(1)=0$

$P'''(X) = 6$ donc $P'''(1) = 6 \neq 0$

donc 1 est racine triple de P d'après P18.

• si $n \geq 2$, $P''(X) = (2n+1)2n X^{2n-1} - (2n+1)(n+1)n X^{n-1} + n(2n+1)(n-1)X^{n-2}$

$P''(1) = (2n+1)2n - (2n+1)(n+1)n + n(2n+1)(n-1)$

$= (2n+1)[2n - n^2 - n + n^2 - n] = (2n+1)\times 0 = 0$

• si $n=2$, $P''(X) = 20X^3 - 30X + 10$, $P''(1)=0$

$P'''(X) = 60X^2 - 30$, $P'''(1) = 30 \neq 0$

donc 1 est racine triple de P

• si $n \geq 3$,

$P'''(X) = (2n+1)2n(2n-1)X^{2n-2} - (2n+1)(n+1)n(n-1)X^{n-2} + n(2n+1)(n-1)(n-2)X^{n-3}$

$P'''(1) = (2n+1)2n(2n-1) - (2n+1)(n+1)n(n-1) + n(2n+1)(n-1)(n-2)$

$= (2n+1)n[2(2n-1) - (n+1)(n-1) + (n-1)(n-2)]$

$= (2n+1)n[4n - \cancel{2} - \cancel{n^2} + 1 + \cancel{n^2} - 2n - n + \cancel{2}]$

$= (2n+1)n[n+1] \neq 0$ car $n \geq 3$.

Dans tous les cas, 1 est racine triple de P.

② Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Il existe $(Q,R) \in \mathbb{R}[X]$ tq

$P = (X-2)^{2n} + (X-1)^n + 1 = Q(X-1)^2(X-2) + R$ avec $\deg(R) < \deg((X-1)^2(X-2)) = 3$

donc R est de la forme : $a_2X^2 + a_1X + a_0$.

On a $P(1) = R(1)$ et $P(2) = R(2)$. Dérivons P

$P' = Q'(X-1)^2(X-2) + Q[2(X-1)(X-2) + (X-1)^2] + R' = 2n(X-2)^{2n-1} + n(X-1)^{n-1}$

$P'(1) = R'(1)$. Or $R' = 2a_2X + a_1$ donc $R'(1) = 2a_2 + a_1$

On doit donc déterminer a_0, a_1 et a_2 tq

$\begin{cases} P(1) = a_2+a_1+a_0 \\ P(2) = 4a_2+2a_1+a_0 \\ P'(1) = 2a_2+a_1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} (-1)^{2n}+1 = 2 = a_2+a_1+a_0 \\ 1^n+1 = 2 = 4a_2+2a_1+a_0 \\ 2n(1-2)^{2n-1} = -2n = 2a_2+a_1 \end{cases}$ $\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\text{ssi}}$ $\begin{cases} 2 = a_2+a_1+a_0 \\ 0 = 3a_2+a_1 \\ -2n = 2a_2+a_1 \end{cases}$

$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\text{ssi}}$ $\begin{cases} 2 = a_2+a_1+a_0 \\ a_1 = -3a_2 \\ -2n = -a_2 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} 2 = 2n - 6n + a_0 \\ a_1 = -6n \\ a_2 = 2n \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a_0 = 2+4n \\ a_1 = -6n \\ a_2 = 2n \end{cases}$

Concl : $R(X) = 2nX^2 - 6nX + 4n + 2$

Si $n=1$, le reste est égal à $P = (X-2)^2 + (X-1) + 1$.

Exercice 3

④ • analyse :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

La formule de Taylor appliquée en 2 permet d'écrire :

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(2)}{k!}(X-2)^k = \sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(2)}{k!}(X-2)^k + \underbrace{\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(2)}{k!}(X-2)^k}_{=0}$$

Si $\forall k \geqslant 3 \quad P^{(k)}(2) = 0$

alors $P = \frac{P^{(0)}(2)}{0!}(X-2)^0 + \frac{P'(2)}{1!}(X-2)^1 + \frac{P''(2)}{2!}(X-2)^2$

c.à.d $P = P(2) + P'(2)(X-2) + \frac{P''(2)}{2}(X-2)^2$. Si $P(2)=5$, $P'(2)=-1$ et $P''(2)=1$

alors $P = 5 - (X-2) + \frac{1}{2}(X^2 - 4X + 4)$

donc $P = 5 - X + 2 + \frac{X^2}{2} - 2X + 2 = 9 - 3X + \frac{X^2}{2}$. Concl : si P est solution du pb posé alors P est le polynôme $9 - 3X + \frac{X^2}{2}$.

• synthèse : le polynôme $9 - 3X + \frac{X^2}{2}$ vérifie bien les 4 conditions :

$P(2) = 5$, $P'(2) = -1$, $P''(2) = 1$ et $\forall k \geqslant 3$, $P^{(k)}(2) = 0$

puisque $P' = -3 + X$ et $P'' = 1$

• Concl : le seul polynôme qui convient est : $P = \frac{1}{2}X^2 - 3X + 9$.

③ On raisonne par analyse-synthèse ici aussi :

• analyse : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(X^2+1)P'' = 6P$.

soit $P = 0$

soit $P \neq 0$ Notons alors n son degré ($n \in \mathbb{N}$) et $a_n \neq 0$ son coefficient dominant. Le terme de plus haut degré de $6P$ est : $6a_nX^n$

Le terme de plus haut degré de $(X^2+1)P''$ est : $X^2 a_n n(n-1) X^{n-2}$

c'est-à-dire $a_n n(n-1) X^n$.

On a donc $6a_n = a_n n(n-1)$ or $a_n \neq 0$ donc $6 = n(n-1)$

donc $n^2 - n - 6 = 0$ donc $n = 3$ ou $n = -2$ or $n \in \mathbb{N}$ donc $n = 3$.

Concl : si P est solution du pb posé alors P est de degré 3 ou P est le polynôme nul.

• synthèse : - le polynôme nul est bien solution du pb posé car $6\tilde{0} = (X^2+1)\tilde{0}''$ car $\tilde{0}'' = \tilde{0}$ et $(X^2+1)\tilde{0}'' = \tilde{0} = 6\tilde{0}$.

- Soit $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ avec $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ et $a_3 \neq 0$

alors $P' = 3a_3X^2 + 2a_2X + a_1$ et $P'' = 6a_3X + 2a_2$

$(X^2+1)P'' = (X^2+1)(6a_3X + 2a_2) = 6a_3X^3 + 2a_2X^2 + 6a_3X + 2a_2$

$(X^2+1)P'' - 6P = 6a_3X^3 + 2a_2X^2 + 6a_3X + 2a_2 - 6a_3X^3 - 6a_2X^2 - 6a_1X - 6a_0$

$(X^2+1)P'' - 6P = (2a_2 - 6a_2)X^2 + (6a_3 - 6a_1)X + 2a_2 - 6a_0$.

ssi $\begin{cases} -4a_2 = 0 \\ 6a_3 - 6a_1 = 0 \\ 2a_2 - 6a_0 = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a_0 = a_2 = 0 \\ a_3 = a_1 \end{cases}$

donc $P = a_3X^3 + a_3X = a_3(X^3 + X)$ avec $a_3 \neq 0$

• Concl : $\mathcal{S} = \{\tilde{0}\} \cup \{k(X^3+X),\ k \in \mathbb{R}^*\} = \{k(X^3+X),\ k \in \mathbb{R}\}$