TD 19 : Convexité

► Exercice 1 : Montrer que si f est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et si g est convexe croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $g \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 2 : Démontrer que si on remplit le bulletin de notes d'un élève en utilisant la moyenne géométrique au lieu de la moyenne arithmétique, cet élève est désavantagé.

► Exercice 3 : Montrer que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ 1 + (\prod_{k=1}^{n} x_k)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k)^{\frac{1}{n}}$.

► Exercice 4 : On admet que toute fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue sur cet intervalle. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f est strictement décroissante alors sa fonction réciproque est convexe sur $f(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si f est strictement croissante alors sa fonction réciproque est concave sur $f(\mathbb{R})$.

► Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si f est majorée alors elle est constante.

► Exercice 6 : Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$.

► Exercice 7 : Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x^{n+1} \geq (n+1)x - n$.