TD17

ex 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable au point a.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$

$$g(x) = \frac{x f(a) - a f(x)}{x-a} = \frac{x\ (f(a) - f(x)) + x f(x) - a f(x)}{x-a}$$

$$g(x) = x \frac{f(a)-f(x)}{x-a} + f(x)\frac{x-a}{x-a} = -x \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(x)$$

Comme f est dérivable en a, f est continue en a et

$$g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -a f'(a) + f(a)$$

Donc g admet une limite finie en a et cette limite vaut $-af'(a)+f(a)$

La réciproque est fausse. Prendre par ex $f : x \mapsto |x|$ avec $a = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad g(x) = \frac{x|0| - 0|x|}{x-0} = \frac{0}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

alors que f n'est pas dérivable en 0.

TD 17

<u>ex 2-3</u> $f : x \mapsto x - a + be^{x}$ si $x \geq 0$
$x \mapsto \cos x - x$ si $x < 0$

f est définie en 0

- <u>Continuité de f</u> : f continue en tout point de $\mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{0^+} f = a+b$ et $\lim\limits_{0^-} f = 1$

f cont en 0 ssi $a+b=1$

<u>Si $a+b \neq 1$, $f \notin \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$</u>

<u>Si $a+b=1$</u> alors $f(x) = x + (1-b) + be^{x}$ si $x \geq 0$
$f(x) = \cos x - x$ si $x \leq 0$

- <u>dérivabilité de f</u>

$\forall x \neq 0$, $f'(x) = 1 + be^{x}$ si $x > 0$
$f'(x) = -\sin x - 1$ si $x < 0$.

$\lim\limits_{0^-} f' = 1+b$ et $\lim\limits_{0^+} f' = -1$ donc $f'_g(0) = 1+b$ et $f'_d(0) = -1$

donc f dér en 0 ssi $b = -2$. <u>Si $b \neq -2$, f n'est pas dér sur $\mathbb{R}$</u>

- <u>continuité et dérivabilité de f' : Si $b=-2$</u>

f' est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f''(x) = be^{x}$ si $x > 0$ $f''(x) = -\cos x$ si $x \leq 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f''(x) = -\cos 0 = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f''(x) = -2 \times e^{0} = -2$

donc $f''_d(0) \neq f''_g(0)$

donc f <u>n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$</u>.

<u>ex 2-4</u>

f est continue sur $\mathbb{R}$ (aucune difficulté).

<u>Dérivabilité de f</u> : f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos x$ pour $x > 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x$ pour $x < 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 0$

Donc $f'_g(0) = 0$

et $f'_d(0) = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos x = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{2} \times \dfrac{\sin x}{x} + \sqrt{x}\cos x = 0 + 0 = 0$

Donc f est dérivable en 0 donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$

f' est <u>continue</u> sur $\mathbb{R}$ (à vérifier)

[illegible]

TD 17 exo 4-3

Soit $x \in \mathbb{R}$ $e^{x}\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix}.e^{x}) = \mathrm{Re}\left(e^{(1+i)x}\right)$.

Donc $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{x}\cos x\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{(1+i)x}\right)\right)$

$$= \mathrm{Re}\left((1+i)^n e^{(1+i)x}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n e^{(1+i)x}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}} e^{x} e^{ix}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^n e^{x}\, \mathrm{Re}\left(e^{i\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^n e^{x} \cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right).$$

TD17 ex 10 Soit $n \geq 1$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\,\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$$ par linéarité de la somme.

en effet, f est dérivable en 0 donc il existe une fonction $\varepsilon : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continue et nulle en 0 tq $\forall x \in [-1,1]$, $f(x) = xf'(0) + x\,\varepsilon(x)$.

et ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k}{n^2} f'(0) + \frac{k}{n^2}\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$

Comme $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ on a donc :

$$S_n = \frac{f'(0)}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\,\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} f'(0) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\,\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Mq $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\,\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$ existe et vaut 0.

On sait que $\varepsilon : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est continue en 0 et que $\varepsilon(0) = 0$

donc $\forall \alpha > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in [-1,1]$, $|x| \leq \eta \Rightarrow |\varepsilon(x)| \leq \alpha$

on prend $n \geq N = \lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor + 1$

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \eta \Rightarrow \left|\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leq \alpha$

Ainsi $\forall \alpha > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\,\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leq \alpha$

Conclusion : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right) = 0$. D'autre part $\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$.