

ex 15-10 - Il y a une erreur dans le corrigé
 $A = X^7 - X - 1$ et $B = X^5 + 1$

(1) Déterminer un couple $(U_0, V_0) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$AU_0 + BV_0 = 1$$

$$X^7 - X - 1 = (X^5 + 1)X^2 + (-X^2 - X - 1) \quad (1)$$

$$X^5 + 1 = (-X^2 - X - 1)(-X^3 + X^2 - 1) + (-X) \quad (2)$$

$$-X^2 - X - 1 = (-X)(X+1) + (-1). \quad (3)$$

$$-X = (-1)X + 0$$

donc $A \wedge B = 1$ et A et B sont premiers entre eux.

Déterminons U_0 et V_0 .

$$(1): \quad -X^2 - X - 1 = X^7 - X - 1 - X^2(X^5 + 1) = A - X^2 B$$

$$(2) \quad -X = X^5 + 1 - (-X^2 - X - 1)(-X^3 + X^2 - 1)$$

$$-X = B - [A - X^2 B](-X^3 + X^2 - 1)$$

$$-X = A[X^3 - X^2 + 1] + B[1 + X^2(-X^3 + X^2 - 1)]$$

$$-X = A[X^3 - X^2 + 1] + B[-X^5 + X^4 - X^2 + 1]$$

$$(3): \quad -1 = -X^2 - X - 1 - (-X)(X+1)$$

$$-1 = A - X^2 B - [A(X^3 - X^2 + 1) + B(-X^5 + X^4 - X^2 + 1)](X+1)$$

$$-1 = A - X^2 B - A(X^3 - X^2 + 1)(X+1) - B(-X^5 + X^4 - X^2 + 1)(X+1)$$

$$-1 = A[1 - (X^3 - X^2 + 1)(X+1)] + B(-X^2 - (-X^5 + X^4 - X^2 + 1)(X+1))$$

$$-1 = A[-X^4 - X^3 + X^3 + X^2 - X] + B(\cancel{X^2} + \cancel{X^6} + \cancel{X^5} - \cancel{X^5} - X^4 + X^3 - \cancel{X^2} - X)$$

$$-1 = A[-X^4 + X^2 - X] + B[X^6 - X^4 + X^3 - X - 1]$$

$$\text{On propose } U_0 = -X^4 + X^2 - X \quad \text{et } V_0 = X^6 - X^4 + X^3 - X - 1$$

(2) changer l'énoncé.