

Chapitre 20 : Analyse asymptotique

Soit I un intervalle non réduit à un élément et $x_0 \in I$. Soient f, g deux fonctions définies sur $I \setminus \{x_0\}$ ou sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 Fonction négligeable vis à vis d'une autre au voisinage de x_0

Définition 1.

f est négligeable vis à vis de g au voisinage de x_0 ssi il existe une application φ définie au voisinage de x_0 telle que $f = \varphi g$ (au voisinage de x_0) telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi = 0$.
On note alors $f = o(g)$ au voisinage de x_0 ou $f = o_{x_0}(g)$.

Cela signifie qu'il existe $h > 0$ et $\varphi : I \setminus \{x_0\} \cap]x_0 - h, x_0 + h[\rightarrow \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \cap]x_0 - h, x_0 + h[, f(x) = \varphi(x)g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$.

Remarque 1. Notons $I_h = I \setminus \{x_0\} \cap]x_0 - h, x_0 + h[$. $\forall x \in I_h, g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. Si $g(x) \neq 0$ alors $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Propriété 1 (Caractérisation à l'aide du quotient).

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , $f = o(g)$ au voisinage de x_0 ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Remarque 2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si g est identiquement nulle au voisinage de x_0 alors $f = o(g)$ au voisinage de x_0 ssi f est identiquement nulle au voisinage de x_0 .
 $f = o_{x_0}(1)$ ssi f tend vers 0 en x_0 .

► Exemple : Soient f et g définies au voisinage de $x_0 = 0$ par $f(x) = 1 - \cos x$ et $g(x) = \sin x$. Montrer que $f = o_0(g)$.

Propriété 2.

Si $f = o(g)$ alors pour tout $\lambda \neq 0$, $f = o(\lambda g)$.

Si f, g, h sont trois fonctions vérifiant $f = o(h)$ et $g = o(h)$ alors $f + g = o(h)$.

La relation de négligeabilité est transitive, c'est-à-dire que si f, g, h sont trois fonctions vérifiant $f = o(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$.

La relation de négligeabilité est compatible avec la multiplication, c'est-à-dire que si $f = o(g)$ et $h = o(i)$, alors $fh = o(gi)$.

Propriété 3.

Si au voisinage de x_0 , la fonction f est négligeable devant une fonction bornée au voisinage de x_0 , alors f tend vers 0 en x_0 .

2 Fonctions dominées par une autre au voisinage de x_0

Définition 2.

f est dominée par g au voisinage de x_0 ssi il existe une application φ définie au voisinage de x_0 telle que $f = \varphi g$ (au voisinage de x_0) telle que φ est bornée au voisinage de x_0 .
On note alors $f = O(g)$ au voisinage de x_0 ou $f = O_{x_0}(g)$.

► Exemple : Soit $f : x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ et $g : x \mapsto x^2$. $f = O(g)$ au voisinage de 0.

► Exemple : $2x^2 + 1 = O_\infty(x^2)$.

Propriété 4 (Caractérisation à l'aide du quotient).

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , $f = O(g)$ au voisinage de x_0 ssi $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de x_0 .

Remarque 3. Cas $f = O(1)$: $f = O(1)$ ssi f est bornée au voisinage de x_0 .
Cas $f = O(0)$.

Propriété 5.

Si au voisinage de x_0 , la fonction f est dominée par une fonction bornée au voisinage de x_0 , alors f est bornée au voisinage de x_0 .

Propriété 6.

Si au voisinage de x_0 , la fonction f est dominée par une fonction tendant vers 0 en x_0 , alors f tend vers 0 en x_0 .

Propriété 7.

1. Si f, g, h sont trois fonctions vérifiant $f = O(h)$ et $g = O(h)$ alors $f + g = O(h)$.
2. Si $f = O(g)$ alors pour tout $\lambda \neq 0$, $f = O(\lambda g)$
3. La relation de domination est compatible avec la multiplication, c'est-à-dire que si $f = O(g)$ et $h = O(i)$, alors $fh = O(gi)$
4. La relation de domination est transitive c'est-à-dire que si $f = O(g)$ et $g = O(h)$, alors $f = O(h)$

Propriété 8.

Si $f = o(g)$ alors $f = 0(g)$.
Si $f = o(g)$ et $h = O(i)$, alors $fh = o(gi)$.
Si $f = o(g)$ et $g = O(h)$, alors $f = o(h)$.
Si $f = O(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$.

3 Fonctions équivalentes

Définition 3.

f est équivalente à g au voisinage de x_0 ssi il existe une application φ définie au voisinage de x_0 telle que $f = \varphi g$ (au voisinage de x_0) telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi = 1$.
On note alors $f \sim g$ au voisinage de x_0 ou $f \sim_{x_0} g$.

Cela est équivalent de dire que $f - g = o(g)$, c'est-à-dire qu'il existe $h > 0$ et $\psi : I \setminus \{x_0\} \cap]x_0 - h, x_0 + h[\rightarrow \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \cap]x_0 - h, x_0 + h[, f(x) - g(x) = \psi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = 0$.

Remarque 4. Si f est équivalente à g au voisinage de x_0 alors g est équivalente à f au voisinage de x_0 . On dit que f et g **sont équivalentes** au voisinage de x_0 . Notons $I_h = I \setminus \{x_0\} \cap]x_0 - h, x_0 + h[$. $\forall x \in I_h, g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. Si $g(x) \neq 0$ alors $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Propriété 9 (Caractérisation à l'aide du quotient).

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , $f \sim g$ au voisinage de x_0 ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

► Exemple : $1 - \cos x \sim_0 \frac{x^2}{2}$ et $\sin x \sim_0 x$.

Remarque 5. Soit $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Si g est nulle au voisinage de x_0 alors $f \sim g$ au voisinage de x_0 ssi f est nulle au voisinage de x_0 .

Au voisinage de x_0 , $f \sim 1$ ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$.

Si $\lambda \neq 0$, $f \sim_{x_0} \lambda$ ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$.

Propriété 10.

$f \sim g$ au voisinage de x_0 ssi $f - g = o_{x_0}(g)$.

Propriété 11.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$ et si $f \sim g$ au voisinage de x_0 alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Réciproquement, si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}^*$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ alors $f \sim g$ au voisinage de x_0 .

Attention la réciproque est fautive si $l = 0$ ou $l = \pm\infty$. Prendre par exemple $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ en 0^+ ou en $+\infty$.

Propriété 12.

Si $f \sim g$ au voisinage de x_0 alors $f = O_{x_0}(g)$.

Propriété 13.

$\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies sur I . $\sim$ est compatible avec la multiplication et la division (si elle est possible) mais **NI AVEC L'ADDITION NI AVEC LA COMPOSITION**.

En particulier, si $f \sim_{x_0} g$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $f^n \sim_{x_0} g^n$. Si $f \sim_{x_0} g$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \sim_{x_0} \lambda g$. Contre-exemple pour la composition et l'addition :

1. au voisinage de 0, $\cos x \sim 1$ et $1 \sim 1$ mais $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \not\sim (1 - 1)$.

2. au voisinage de 0^+ , $\ln 2x \sim \ln x$ (à montrer) et $e^{\ln 2x} = 2x \not\sim e^{\ln x} = x$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} = 2$.

On a cependant les résultats suivants :

Propriété 14 (Cas particuliers d'équivalent d'une somme).

Si f et g sont deux fonctions telles que $g = o(f)$ alors $f + g \sim f$.

A redémontrer à chaque exercice : Si $f_1 \sim \varphi_1$ et $f_2 \sim \varphi_2$ au voisinage de x_0 et si $\varphi_1, \varphi_2 > 0$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 + f_2 \sim \varphi_1 + \varphi_2$ en x_0 .

► Exemple : Équivalent en 0 de $\ln(\sin x)$.

On retient que lorsqu'on doit chercher un équivalent d'une somme, on examine le signe des termes. Si les termes ont même signe, on le précise clairement et on peut sommer un équivalent de chacun des termes de la somme. Si ce n'est pas le cas, on passe par une écriture en $o(\quad)$.

Propriété 15 (Cas particuliers d'équivalent d'une composée : à redémontrer à chaque utilisation).

1. $e^f \sim e^g$ au voisinage de $x_0 \iff \lim_{x_0} (f - g) = 0$.
2. Si $f, g > 0$, et $\lim_{x_0} f = l \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $l \neq 1$, alors $f \sim g$ au voisinage de $x_0 \Rightarrow \ln f \sim \ln g$ au voisinage de x_0 .
3. Si $f, g > 0$ et $f \sim_{x_0} g$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f^\alpha \sim g^\alpha$ au voisinage de x_0 .

Propriété 16 (Substitution dans un équivalent).

Soient f et g deux fonctions définies sur I . On suppose que $f \sim_{x_0} g$.
 Soit φ une fonction définie au voisinage du point a , à valeurs dans I et telle que $\lim_{t \rightarrow a} \varphi(t) = x_0$, alors on a
 $f(\varphi(t)) \sim_{t \rightarrow a} g(\varphi(t))$.

► Exemple : Comme $t^2 \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$, on en déduit que $\sin(2t) \sim_{t \rightarrow 0} 2t$.

Propriété 17 (Obtention d'un équivalent par encadrement).

Si f, g et h sont trois fonctions réelles définies sur I telles que $f \leq g \leq h$ au voisinage de x_0 et si f et h sont équivalentes à une même fonction i alors $g \sim_{x_0} i$.

► Exemple : déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f : x \mapsto \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x)$.

Propriété 18.

Si $f \sim g$ au voisinage de x_0 alors au voisinage de x_0 le signe de $f(x)$ est égal à celui de $g(x)$.
 Si $f \sim g$ au voisinage de x_0 et si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 alors au voisinage de x_0 f ne s'annule pas non plus.

4 Equivalents classiques

Propriété 19.

Soit f une fonction définie sur I . Supposons que f est dérivable en $x_0 \in I$ et que $f'(x_0) \neq 0$. Alors $f(x) - f(x_0) \sim_{x_0} f'(x_0)(x - x_0)$.

Au voisinage de 0 :

$$\sin x \sim x$$

$$\tan x \sim x$$

$$\text{Arctan}(x) \sim x$$

$$\text{Arcsin}(x) \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\sinh x \sim x$$

$$\tanh x \sim x$$

$$\text{Si } \alpha \in \mathbb{R}^*, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$1 - \cosh x \sim -\frac{x^2}{2}$$

5 Traduction à l'aide du symbole o des résultats de croissances comparées

au voisinage de $+\infty$:

Pour tous réels a et b strictement positifs, $(\ln x)^b = o_{+\infty}(x^a)$.

$x^b = o_{+\infty}(e^{ax})$ avec $a \in \mathbb{R}$.

au voisinage de $-\infty$:

Pour tous réels a et b strictement positifs, $e^{ax} = o_{-\infty}(|x|^{-b})$.

au voisinage de 0 :

Pour tous réels a et b strictement positifs, $|\ln x|^b = o_0(x^{-a})$.

Ces résultats subsistent si $b \leq 0$.

6 Relations de comparaison : cas des suites

6.1 Suite négligeable devant, dominée par, équivalente à

Définition 4.

Soient u et v deux suites réelles, on dit que la suite u est **négligeable devant** la suite v et on note $u = o(v)$, lorsqu'il existe une suite w de limite nulle telle qu'à partir d'un certain rang, $u_n = v_n w_n$.

► Exemple : u définie par $u_n = n$ et v définie par $v_n = n^2$.

Propriété 20.

Lorsqu'à partir d'un certain rang, la suite v ne s'annule plus, on a $u = o(v) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

Remarque 6. Cas $u = o(1)$ et $u = o(0)$.

Propriété 21.

La relation de négligeabilité est transitive, c'est-à-dire que si u, v, w sont trois suites vérifiant $u = o(v)$ et $v = o(w)$, alors $u = o(w)$.

La relation de négligeabilité est compatible avec la multiplication, c'est-à-dire que si $u = o(v)$ et $r = o(s)$, alors $ru = o(sv)$

Propriété 22.

Si $u = o(v)$ et si v est bornée, alors u est de limite nulle.

Définition 5.

On dit que u est **dominée par** v et on note $u = O(v)$ lorsqu'il existe une suite bornée w vérifiant à partir d'un certain rang $u_n = w_n v_n$.

► Exemple : $u_n = 2n + 5$ et $v_n = 18n - 26$

Propriété 23.

Lorsque v ne s'annule plus à partir d'un certain rang, on a $u = O(v)$ si et seulement si la suite $\frac{u}{v}$ est bornée.

Remarque 7. Cas $u = O(1)$ et $u = O(0)$.

Propriété 24.

1. Si $u = O(v)$ alors pour tout $\lambda \neq 0$, $u = O(\lambda v)$
2. La relation de domination est transitive c'est-à-dire que si $u = O(v)$ et $v = O(w)$, alors $u = O(w)$

Définition 6.

On dit que la suite u est **équivalente à** la suite v , lorsqu'il existe une suite w de limite 1, vérifiant $u_n = v_n w_n$ à partir d'un certain rang. On écrit alors $u \sim v$.

Remarque 8. 1. Si v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on peut écrire $u \sim v \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$
 2. Si u est équivalente à v , alors v est équivalente à u . On dit souvent u et v sont équivalentes.

Propriété 25.

$$u \sim v \iff u = v + o(v).$$

Remarque 9. Cas $u \sim 0$ et $u \sim l$ avec l un réel non nul.

Propriété 26 (Opérations sur les suites équivalentes).

1. $\sim$ est transitive : si $u \sim v$ et $v \sim w$ alors $u \sim w$.
2. Si $u \sim v$ et $u' \sim v'$, alors $uu' \sim vv'$. et si de plus r est à termes non nuls à partir d'un certain rang, alors $\frac{u}{r} \sim \frac{v}{s}$.
3. Si $u \sim v$ et $u' \sim v'$ et si à partir d'un certain rang aucune de ces suites ne s'annule, alors $\frac{u}{u'} \sim \frac{v}{v'}$.
4. Si $u \sim v$ et $w = o(u)$, alors $w = o(v)$.
5. Il n'y a pas de résultat général pour une somme ou une différence d'équivalents, excepté dans le cas suivant : si $u = v + w$ et $w = o(v)$, alors $u \sim v$.

Remarque 10. $\sim$ est une relation d'équivalence.

Propriété 27.

Soient u et v deux suites équivalentes.
 Si v ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors u non plus.
 Si v est à termes positifs ou nuls à partir d'un certain rang alors u aussi.
 Si v est à termes négatifs ou nuls à partir d'un certain rang alors u aussi.

Propriété 28.

Si $u \sim v$, et si v converge dans $\mathbb{R}$ vers l (finie ou infinie) alors u converge vers l aussi.

6.2 Application de la comparaison des fonctions à celle des suites

Soit u une suite à valeurs dans I admettant x_0 comme limite.

Si f est dominée par g au voisinage de x_0 alors la suite $(f(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par la suite $(g(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si f est négligeable devant g au voisinage de x_0 alors la suite $(f(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(g(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si f est équivalente à g au voisinage de x_0 alors la suite $(f(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(g(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

► Exemple : $\ln(\cos(\frac{1}{n})) \sim \cos(\frac{1}{n}) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$.

Les résultats de la propriété suivante découlent des équivalents des fonctions usuelles sin, cos, ln, exp et puissance en 0 ou 1.

Propriété 29 (Equivalences de référence).

Lorsque u converge vers 0, on a

1. $\sin u_n \sim u_n$
2. $1 - \cos u_n \sim \frac{u_n^2}{2}$
3. $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
4. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
5. $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$

6.3 Comparaison des suites de référence

Les suites $n \mapsto a^n$ (suites géométriques ou exponentielles), $n \mapsto n^\alpha$ (suites puissances ou polynômiales), $n \mapsto (\ln n)^\beta$, $n \mapsto n!$, où $a > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tendent vers $+\infty$ en croissant et sont appelées suites de référence.

Propriété 30 (Négligeabilités de référence).

1. Soit $\alpha < \beta$, on a $n^\alpha = o(n^\beta)$
2. Soit $a > 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; on a $n^\alpha = o(a^n)$
3. Soit $0 < a < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; on a $a^n = o(n^\alpha)$
4. Soit $\alpha > 0$ et β réel quelconque, $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$
5. Soit $\alpha < 0$ et β un réel quelconque, $n^\alpha = o((\ln n)^\beta)$
6. Soit $a \in \mathbb{R}$, on a $a^n = o(n!)$
7. $n! = o(n^n)$

7 Développements limités

En physique et en mathématiques, un développement limité (noté D.L.) d'une fonction au voisinage d'un point est une approximation polynomiale de cette fonction en un point, c'est-à-dire l'écriture de cette fonction sous la forme de la somme d'une fonction polynôme et d'un reste qui peut être négligé lorsque la variable est suffisamment proche du point considéré.

En physique, il est fréquent de confondre la fonction avec son développement limité, à condition que l'erreur (c'est-à-dire le reste) ainsi faite soit inférieure à l'erreur autoirsée. Si l'on se contente d'un développement d'ordre 1, on parle d'approximation linéaire.

En mathématiques, les développements limités permettent de trouver plus simplement des limites de fonctions, de calculer des dérivées, de prouver qu'une fonction est intégrable ou non, ou encore d'étudier des positions de courbes par rapport à des tangentes.

L'étude des développements limités se prolonge par l'étude des développements asymptotiques.

7.1 Définition

Définition 7 (DL au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$).

Soit f définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ (sauf peut-être en x_0 sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $\alpha > 0$) à valeurs dans $\mathbb{K}$.
 f possède un DL à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) au voisinage de x_0 ssi il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et une fonction ε définie sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ sauf peut-être en x_0 tels que
 $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\}$, $f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.
 $P(x - x_0)$ est appelé **partie principale du DL**.
 $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est appelé **reste du DL**.

Remarque 11. Si $x_0 = 0$ alors on parle de DL en 0.

$\forall x \in]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$, $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Le développement limité à l'ordre n de f en x_0 peut se ramener à celui de $h \mapsto f(x_0 + h)$ en 0.

On peut même dire que f admet le DL à l'ordre n en x_0 : $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n)$ ssi $h \mapsto f(x_0 + h)$

admet le DL à l'ordre n en 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o_0(h^n)$

7.2 Propriétés au voisinage de 0

Propriété 31 (Unicité).

Si f a un DL à l'ordre n au voisinage de 0, celui-ci est unique.

Propriété 32 (Troncature d'un DL à l'ordre n).

Si f a un DL à l'ordre n au voisinage de 0 alors si $p \leq n$, f a un DL à l'ordre p au voisinage de 0.
La partie principale du DL à l'ordre p est la **troncature à l'ordre p** de la partie principale du DL à l'ordre n .

Propriété 33 (DL d'une fonction paire, impaire).

Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre n en 0 dont la partie principale est P .
Si f est paire alors $P(x)$ n'est formée que des puissances paires de x .
Si f est impaire alors $P(x)$ n'est formée que des puissances impaires de x .

Propriété 34 (Terme prépondérant et signe).

Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre n en 0 dont la partie principale, $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$, est non nulle.
Si on note $p = \min\{i \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_i \neq 0\}$, on a $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} a_p x^p$.
En particulier, si f est réelle alors $f(x)$ a le signe de $a_p x^p$ au voisinage de 0.

► Exemple : Signe au voisinage de 0 de $f : x \mapsto x^3 - 4x^4 + o(x^4)$.

Propriété 35 (Caractérisation des fonctions continues).

f admet un DL à l'ordre 0 au voisinage de 0 ssi f admet une limite finie en 0.

Propriété 36 (Caractérisation des fonctions dérivables).

Soit f une fonction définie en 0. f admet un DL à l'ordre 1 au voisinage de 0 ssi f est dérivable en 0.

Si la fonction f possédant un DL n'est pas définie en x_0 , on peut la prolonger par continuité. La fonction prolongée est alors dérivable en x_0 . C'est le cas par exemple de $x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x}$.

Remarque 12. Ces deux dernières propriétés ne se généralisent pas aux ordres supérieurs. En effet, il existe des fonctions qui admettent un DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 et qui pourtant ne sont pas deux fois dérivables en 0 (ou leur prolongement par continuité). Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. f admet un DL à l'ordre 2 : $f(x) = 0 + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = x \sin(\frac{1}{x}) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow 0$. $f(0) = f'(0) = 0$.
 $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$. $\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0. Donc $f''(0)$ n'existe pas.

7.3 Calcul des développements limités par la formule de Taylor-Young**Théorème 1 (Formule de Taylor-Young).**

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$, alors il existe une fonction ϵ définie sur I telle que

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0.$$

Propriété 37 (Existence d'un DL).

Toute fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur un intervalle I contenant 0 admet un développement limité à l'ordre p en 0.

Développements limités des fonctions usuelles en 0 (4 DL **fondamentaux**) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

En particulier,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4.6\dots(2n)}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)}x^n + o(x^n)$$

Propriété 38.

Si f a un DL à l'ordre n au voisinage de 0 et si $\exists p \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^*$ tels que $g(x) = f(ax^p)$ alors g a un DL à l'ordre np au voisinage de 0.

► Exemples : Calculer le DL à l'ordre $2n$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \cdots - \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4.6\dots(2n)}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)}x^n + o(x^n)$$

7.4 Ensemble des fonctions qui admettent en 0 un DL à l'ordre n

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.

On précise que $1 = 1 + x^n \epsilon(x)$ où ϵ est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Propriété 39.

Soient f et g deux fonctions définies sur I (sauf peut-être en 0) qui admettent en 0 un DL à l'ordre n et $\alpha \in \mathbb{R}$. $f + g$, αf et fg admettent en 0 un DL à l'ordre n .

► Exemple : Calculer le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions $f : x \mapsto e^x \cos x$, $g : x \mapsto \cos x \sin x$ et $h : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x - 2}$.

► Exemple : $\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$.

$$\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

7.5 Quotient

Voici deux propriétés qui permettent d'obtenir le DL de quotients.

Propriété 40.

Soit u une fonction telle que $\lim_0 u = 0$. Si u admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0 alors $x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$ admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0.

► Exemple : Calculer le DL à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$. ► Exemple : Calculer d'une nouvelle façon le DL à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x-2}$.

Propriété 41.

Soient f et g deux applications définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui admettent des DL en a . Si g a une limite non nulle l en a alors $\frac{f}{g}$ admet un DL à l'ordre n en a .

Démonstration : $\forall x \in I, g(x) = l - (l - g(x)) = l(1 - \frac{l - g(x)}{l})$ avec $\frac{l - g(x)}{l} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow a$. ► Exemple : DL(3,0) de $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$.

► Exemple : Calculer le DL à l'ordre 5 en 0 de $\tan$, de $\tanh$.

7.6 Intégration

Théorème 2.

Si f est une fonction définie sur un voisinage de 0 I telle que f' ait un DL au voisinage de 0 à l'ordre n : $f'(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$. Alors f a un DL au voisinage de 0 à l'ordre $n+1$ dont la partie principale Q est le polynôme primitif de P (c'est-à-dire tel que $Q' = P$) qui vérifie $Q(0) = f(0)$.

► Exemple : Montrer que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

En déduire que $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

► Exemple : En déduire le DL à l'ordre $2p+1$ ($p \geq 0$) en 0 de Arctan .

7.7 Dérivation

Si f a un DL à l'ordre $n \leq 1$, on ne peut même pas assurer que f' existe sur un voisinage de 0, ni que f' a un DL à l'ordre 0 (lorsque f' existe). En effet examinons la fonction $f : x \mapsto x^3 \sin(\frac{1}{x^3})$. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 0 + x^2(x \sin \frac{1}{x^3})$. $f'(x) = 2x^2 \sin \frac{1}{x^3} - 3\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^3}$ n'a pas de limite en 0. f' n'est pas continue en 0 et f' n'a pas de DL au voisinage de 0. On retient donc que **dans le cas général, on ne peut pas dériver un DL**.

7.8 Composition

Si f a un DL à l'ordre n au voisinage de 0 : $f(x) = \underbrace{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}_{P(x)} + x^n \varepsilon(x)$.

Si g a un DL à l'ordre n au voisinage de $f(0)$: $g(y) = \underbrace{g(f(0) + b_1(y-f(0)) + \dots + b_n(y-f(0))^n)}_{Q(y-f(0))} + (y-f(0))^n \varepsilon'(y)$,

alors $g \circ f$ a un DL à l'ordre n au voisinage de 0 dont la partie principale est la troncature à l'ordre n de $Q(P(x)-f(0))$.

► Exemple : DL(3,0) de $x \mapsto f(x) = e^{\sin x}$.

8 Application des DL

8.1 Recherche d'un équivalent d'une somme d'infiniment petits

► Exemple : Déterminer un équivalent en 0 de $f : x \mapsto \ln(1-x) + \sqrt{1+2x} - \frac{1}{1+x^2}$.

8.2 Etude de formes indéterminées

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ où $g : x \mapsto \frac{f(x)}{\arctan x - \arcsin x}$.

8.3 Etude locale d'une courbe au voisinage de x_0

Si f a un DL à l'ordre n au voisinage de x_0 ($n \geq 2$).

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x).$$

$y = a_0 + a_1(x-x_0)$ est l'équation de la tangente en x_0 à la courbe représentative de f .

La position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de

$$f(x) - a_0 - a_1(x-x_0) = a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x).$$

Si $a_2 > 0$, la courbe est localement au-dessus de la tangente.

Si $a_2 < 0$, la courbe est localement en-dessous de la tangente.

Si $a_2 = 0$, ?

Si l'un des $a_3, \dots, a_n$ est non nul, on peut répondre. Soit k le plus petit élément de $[[3, n]]$ tel que $a_k \neq 0$. Alors $f(x) - a_0 - a_1(x-x_0) \sim a_k(x-x_0)^k$.

Si k est impair, la courbe traverse sa tangente. $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion (il y a changement de convexité en x_0).

Si k est pair, il y a deux cas à distinguer : si $a_k > 0$, la courbe est localement au-dessus de la tangente ; si $a_k < 0$, la courbe est localement en dessous de la tangente.

Enfin si $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$, on ne peut rien dire du tout.

► Exemple : Etude locale au voisinage de 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$.

8.4 Etude d'extrema

Propriété 42 (Condition nécessaire d'existence d'un extremum).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles. On suppose que f admet en un point x_0 intérieur à I , un extremum local ou global et un DL à l'ordre 1 : $f(x) = A + B(x-x_0) + o(x-x_0)$. On a alors $B = 0$.

Propriété 43 (Condition suffisante d'existence d'un extremum).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles. On suppose que f admet en un point x_0 de I un DL à l'ordre 2 de la forme : $f(x) = f(x_0) + C(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$ avec $C \neq 0$. On a alors :

- si $C > 0$, la fonction f possède un minimum local en x_0
- si $C < 0$, la fonction f possède un maximum local en x_0

Remarque 13. — Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$ alors

- si $f''(x_0) > 0$, la fonction f possède un minimum local en x_0
- si $f''(x_0) < 0$, la fonction f possède un maximum local en x_0
- Si $f(x) = a_0 + a_k(x-x_0)^k + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$ avec $a_k \neq 0$, $k > 1$. La tangente est horizontale. Si k est pair, la courbe présente un extremum en x_0 . C'est un minimum si $a_k > 0$ et un maximum si $a_k < 0$. Si k est impair, il y a un point d'inflexion en x_0 .

8.5 Etude de branches infinies

Si $\lim_{\pm\infty} f = \pm\infty$ et si $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ a un DL à l'ordre n au voisinage de $\pm\infty$, $\frac{f(x)}{x} = a_0 + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + \cdots + a_n \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n} \varepsilon(x)$ alors $f(x) = a_0 x + a_1 + a_2 \frac{1}{x} + \cdots + a_n \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-1}} \varepsilon(x)$. On parle alors de développement **asymptotique**

à la précision $\frac{1}{x^{n-1}}$.

La droite d'équation $y = a_0x + a_1$ est asymptote à la courbe représentant f . La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe du premier terme non nul $a_k \frac{1}{x^{k-1}}$ avec $k > 1$.

► Exemple : Soit $f : x \mapsto x\sqrt{\frac{4x-1}{x+1}}$. Etudier f en $\pm\infty$. Pour cela on cherche un DL de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

9 Exemples de développements asymptotiques discrets et continus

9.1 au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$

Il s'agit de DL suivant les puissances entières positives ou négatives de $(x-a)$. On ordonne les puissances $(x-a)^k$ suivant les valeurs croissantes de l'entier $k \in \mathbb{Z}$.

► Exemple : : obtenir le développement à l'ordre 2 ou à la précision x^2 de cotan au voisinage de 0.

9.2 au voisinage de l'infini

Les développements se font suivants les puissances décroissantes de x .

► Exemple : : obtenir le développement à l'ordre -2 ou à la précision x^{-2} de $x \mapsto \frac{x^5+1}{2+x+x^3}$ au voisinage de $\pm\infty$.

9.3 d'une application réciproque

Soit $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2 \tan x - x$. Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$ et que sa bijection réciproque admet un DL à l'ordre 6 en 0. Donner ce DL.

► Exemple : : obtenir le développement à l'ordre 1 de $x \mapsto \arccos$ au voisinage de 1.

9.4 plus général qu'avec des fonctions puissances

Ce sont des développements asymptotiques faisant intervenir une gamme de fonctions plus large que les fonctions puissances entières utilisées lors de développements limités.

► Exemple : : obtenir le développement à l'ordre -2 ou à la précision x^{-2} de $x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x})$ en 0.

► Exemple : : obtenir le développement à la précision $x^3 \ln x$ de $x \mapsto \operatorname{sh}(x) \ln(\sin x) - x \ln x$ au voisinage de 0.

9.5 développement asymptotique de $\ln(n!)$

Propriété 44 (Formule de Stirling).

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

► Exemple : Déterminer un développement asymptotique de $\ln(n!)$.