Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1 :

On définit la fonction f par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

1. Partie 1 : étude de la fonction f
   (a) Quel est l'ensemble de définition D de f ? Justifier.
   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D .
   (c) Déterminer f' et f''. Préciser la convexité de f sur D.
   (d) Dresser le tableau de variations de f' puis en déduire celui de f.
   (e) Montrer que f possède un et un seul point fixe, noté α, et que $\alpha \in \left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$.
2. Partie 2 : étude d'une suite
   Soit u la suite telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{1}{1+u_n+(u_n)^2}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{3} \leq u_n \leq 1$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel $C \in]0,1[$ tel que
   $$\forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right],\ |f'(x)| \leq C.$$
   (c) Énoncer l'inégalité des accroissements finis.
   (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant C^n$.
   (e) Indiquer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
3. Partie 3 : étude des dérivées successives de f
   Dans cette question, on admet que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n dans $\mathbb{R}[X]$ de degré n tel que
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$$
   où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f.
   On admet également que pour tout $n \geq 2$, $P_n + n(2X+1)P_{n-1} + n(n-1)(1+X+X^2)P_{n-2} = 0$
   et que pour tout $n \geq 1$, $P_n' = -(n+1)nP_{n-1}$.
   (a) Donner sans calcul P_0, P_1 et P_2.
   (b) Soit β un nombre réel. Montrer que, pour $n \geq 2$, si β est racine de P_n et de P_{n-1}, alors β est aussi racine de P_{n-2}.
   (c) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, les polynômes P_n et P_{n-1} n'ont aucune racine réelle commune.
   (d) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, les racines réelles de P_n sont toutes simples (d'ordre de multiplicité égal à 1). On raisonnera par l'absurde.
4. Partie 4 : décomposition d'une fraction rationnelle
   Soit $F = \dfrac{X^3+5X^2-30X+44}{(X^2+X+1)(X-3)^2}$.
   (a) Décomposer F en éléments simples dans $R(X)$.
   (b) Soit $h\ :\ x \mapsto F(x)$. Déterminer l'ensemble de définition de h, montrer que h est $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ensemble et déterminer la dérivée n-ième de h.

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $X^2 + X + 1$ divise $(X^4 + 1)^n - X^n$ dans $\mathbb{R}[X]$?
2. On définit une suite de polynôme (P_n) par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - Pn$.
   (a) Calculer P_2 et P_3.
   (b) Déterminer degré et coefficient dominant de P_n.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
   (d) En déduire une expression simple de $P_n(2\cos(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
   (e) Déterminer les racines de P_n.

Exercice 3 :

Les deux questions sont indépendantes.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ sinon.
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) En utilisant le théorème de la limite de la dérivée, montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux applications continues sur $[a, b]$ et dérivables en tout point de $]a, b]$.
   (a) En considérant la fonction h définie sur $[a, b]$ par :
   $$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x),$$
   montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.
   (b) Quel résultat du cours retrouve-t-on si $g\ :\ x \mapsto x$?
   (c) On suppose désormais que $f(a) = g(a) = 0$ et que la fonction $\frac{f'}{g'}$ est définie sur $]a, b]$ et admet une limite finie ℓ en a. On suppose également que g ne s'annulle pas sur $]a, b]$. Montrer qu'alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet pour limite ℓ en a. Cette propriété est appelée règle de l'Hospital.
   (d) En utilisant cette règle, déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + x)}$.
   (e) Montrer que la réciproque de la règle de l'Hospital est fausse en examinant les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^+$ par :
   $\forall x \geq 0,\ g(x) = x$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.