

TD 20

ex 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$

$$\bullet \left(1 + \frac{\theta}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{\theta}{n})} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta}{n} = 0 \text{ donc } \ln(1 + \frac{\theta}{n}) \sim \frac{\theta}{n}$$

$$\text{et } n \ln(1 + \frac{\theta}{n}) \sim \theta$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 + \frac{\theta}{n}) = \theta$ et comme exp est continue

$$\text{sur } \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(1 + \frac{\theta}{n})} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 + \frac{\theta}{n})} = e^\theta$$

Concl: $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\theta}{n}\right)^n = e^\theta}$

$$\bullet \left(1 + \frac{i\theta}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{\theta^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{i n \arctan(\frac{\theta}{n})}$$

En effet, $1 + \frac{i\theta}{n} = \rho_n e^{i d_n}$ avec $\rho_n = \left|1 + \frac{i\theta}{n}\right| = \sqrt{1 + \frac{\theta^2}{n^2}}$

et comme $\operatorname{Re}(1 + \frac{i\theta}{n}) > 0$, $d_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan d_n = \frac{\theta}{n}$ implique que $d_n = \arctan \frac{\theta}{n}$.

$$\text{Donc } \left(\rho_n e^{i d_n}\right)^n = \rho_n^n e^{i n d_n} = \left(1 + \frac{\theta^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{i n \arctan \frac{\theta}{n}}$$

$$= e^{\frac{n}{2} \ln(1 + \frac{\theta^2}{n^2})} e^{i n \arctan \frac{\theta}{n}}$$

D'une part, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta}{n} = 0$, $\arctan \frac{\theta}{n} \sim \frac{\theta}{n}$ donc

$$n \arctan \frac{\theta}{n} \sim \theta \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{i n \arctan \frac{\theta}{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n \arctan \frac{\theta}{n}) + i \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n \arctan \frac{\theta}{n})$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \text{ car cos et sin continus sur } \mathbb{R}$$

D'autre part, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta^2}{n^2} = 0$,

$$\ln\left(1 + \frac{\theta^2}{n^2}\right) \sim \frac{\theta^2}{n^2} \text{ donc } \frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{\theta^2}{n^2}\right) \sim \frac{\theta^2}{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{n}{2} \ln(1 + \frac{\theta^2}{n^2})} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} \ln(1 + \frac{\theta^2}{n^2})} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta^2}{2n}} = e^0 = 1$$

Concl: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{i\theta}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{n}{2} \ln(1 + \frac{\theta^2}{n^2})} \times \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{i n \arctan \frac{\theta}{n}} = 1 \times e^{i\theta} = \boxed{e^{i\theta}}$

Ex 5 TD 20 cor

(5) $\ln(e^n - 1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(e^n)$

car

$$\frac{\ln(e^n - 1)}{\ln e^n} = \frac{\ln(e^n(1 - e^{-n}))}{n} = \frac{\ln(e^n) + \ln(1 - e^{-n})}{n}$$

$$= \frac{n}{n} + \frac{\ln(1 - e^{-n})}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc $\ln(e^n - 1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$

donc $n \ln(e^n - 1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$

et $n^2 + \cos n + 1 = n^2 + o(n^2) + o(n^2) = n^2 + o(n^2) \sim n^2$

en effet $\frac{\cos n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $(\cos n)$ est bornée et $\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc $\frac{n \ln(e^n - 1)}{n^2 + \cos n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \ln(e^n - 1)}{n^2 + \cos n + 1} = 1$

(6) $\ln(1 + e^{-n})^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(\ln(1 + e^{-n}))\right)$

car $e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\ln(1 + e^{-n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n}$

Ma $\ln(\ln(1 + e^{-n})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n$

$\ln(1 + e^{-n}) > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0 \neq 1$ donc on peut utiliser PIS-2

donc $\frac{1}{n} \ln(\ln(1 + e^{-n})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln(\ln(1 + e^{-n}))} = e^{-1}$

car exp est continue en -1

(7) $(2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(2^n + 3^n)}$

or $\ln(2^n + 3^n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln 3^n$ car

$$\frac{\ln(2^n + 3^n)}{\ln(3^n)} = \frac{\ln(3^n(\frac{2}{3})^n + 1)}{\ln(3^n)}$$

Donc $\frac{1}{n} \ln(2^n + 3^n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln 3^n}{n}$

$$= \frac{\ln(3^n) + \ln(1 + (\frac{2}{3})^n)}{\ln(3^n)} = 1 + \frac{\ln(1 + (\frac{2}{3})^n)}{\ln(3^n)}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

or $\frac{\ln 3^n}{n} = n \frac{\ln 3}{n} = \ln 3$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(2^n + 3^n) = \ln 3$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln(2^n + 3^n)} = e^{\ln 3} = 3$

puisque exp est continue en 3.