

Exercice 1:

On considère dans tout ce problème les deux fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$G(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

1. (a). Montrer que les fonctions F et G sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
 (b). Montrer que F et G sont prolongeables par continuité en 0. On notera encore F et G ces prolongements.
2. (a). Montrer que les fonctions F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer leurs dérivées.
 (b). Démontrer, à l'aide de développements limités, que les fonctions F et G sont dérivables en 0. Préciser les valeurs de $F'(0)$ et $G'(0)$.
3. (a). Montrer que les réels strictement positifs tels que $F(x) = 0$ constituent une suite $(a_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante. On donnera explicitement la valeur de a_k .
 (b). Montrer que les réels strictement positifs tels que $G(x) = 0$ constituent une suite $(b_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante. Y-a-t'il un lien entre les suites $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$?
4. (a). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer sans calcul qu'il existe un réel $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.
 (b). Montrer que la fonction F' est de même signe que $h : x \mapsto x \cos(x) - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 (c). Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.
 (d). En déduire l'unicité du réel x_k défini dans la question 4.(a).
 (e). Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, x_k \in]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}[$.
 (f). Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$ puis déterminer un équivalent simple de la suite (x_k) .

Exercice 2: ① ex 3 TD19. On fera intervenir la fonction $x \mapsto \ln(1+e^x)$

② ex 4-1 TD19

Exercice 3 : ① ex 10 TD20. On écrit un DL au voisinage de 0

② ex 11 TD20. On écrit le DL₃(0) de f

③ ex 16 TD20. Pour l'étude en $+\infty$, effectuer le DL généralisé au voisinage de $+\infty$ et à la précision $\frac{1}{x}$.