

Exercice 1 $F = \frac{1}{1+x+x^2}$

① a) les racines de $1+x+x^2$ sont j et $j^2 = \bar{j}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x+x^2 \neq 0$
la fraction rationnelle F n'a pas de pôle dans $\mathbb{R}$ donc $D = \mathbb{R}$

① b) En tant que fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

① c) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -\frac{2(1+x+x^2)^2 - 2(2x+1)(1+x+x^2)(2x+1)}{(1+x+x^2)^4}$

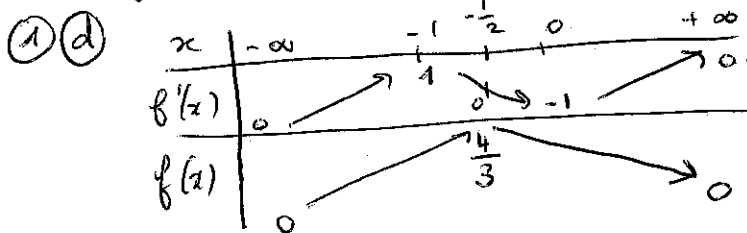
$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -2 \frac{(1+x+x^2)[(1+x+x^2) - (2x+1)^2]}{(1+x+x^2)^4}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -2 \frac{(1+x+x^2)^4 - 3x - 3x^2}{(1+x+x^2)^3} = \frac{6x(x+1)}{(1+x+x^2)^3}$

$\forall x \in \mathbb{R}, 1+x+x^2 > 0$ donc $(1+x+x^2)^3 > 0$ d'où le tableau de signes:

x	-1	0
x	-	+
$x+1$	-	+
$f''(x)$	+	-

Ainsi f est concave sur $]-\infty, -1]$ et sur $[0, +\infty[$ et convexe sur $]-1, 0[$.



$f'(-1) = 1$

$f'(0) = -1$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$

$f'(x) = 0$ si $2x+1=0$ si $x = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

① e) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ α est point fixe de f si $f(\alpha) = \alpha$ si $\frac{1}{1+\alpha+\alpha^2} = \alpha$ si $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = 1$
si $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$.

Soit $g: x \mapsto x^3 + x^2 + x - 1$ g est une fonction polynomiale donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} g'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$ car $\Delta < 0$
Donc g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[$ c-à-d vers $\mathbb{R}$.

or $0 \in \mathbb{R}$ donc $\exists! \alpha \in \mathbb{R}$ tq $g(\alpha) = 0$ c-à-d tq $f(\alpha) = \alpha$.

De plus $g(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1+3+9-27}{27} = -\frac{14}{27} < 0$ et $g(1) = 2 > 0$

Ainsi $g(\frac{1}{3}) < g(\alpha) = 0 < g(1)$ et g' strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $g^{-1}(g(\frac{1}{3})) < g^{-1}(g(\alpha)) < g^{-1}(g(1)) \Rightarrow \frac{1}{3} < \alpha < 1$

Conclusion: $\alpha \in]\frac{1}{3}, 1[$ donc $\alpha \in [\frac{1}{3}, 1]$.

- ②a) Soit $P(n): \frac{1}{3} \leq u_n \leq 1$. Mg $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ vraie par récurrence 2/8
 • initialisation: $u_0 = 1$ et $\frac{1}{3} \leq u_0 \leq 1$ donc $P(0)$ vraie
 • hérédité: supposons que $P(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. Ma $P(n+1)$ vraie. $\frac{1}{3} \leq u_n \leq 1$ par hypothèse de récurrence.

Comme f est décroissante sur $[-1, +\infty[$, on a: $f(\frac{1}{3}) \geq f(u_n) \geq f(1)$
 $f(\frac{1}{3}) \geq f(u_n) \geq f(1)$ c'est à dire $\frac{9}{13} \geq u_{n+1} \geq \frac{1}{3}$ or $1 > \frac{9}{13}$ et donc $P(n+1)$ vraie.

• Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ vraie

- ②b) f' est croissante sur $[0, +\infty[$ donc $\forall x \in [\frac{1}{3}, 1]$, $f'(x) \in [f'(\frac{1}{3}), f'(1)]$
 d'après q(1d). Or $f'(\frac{1}{3}) = -\frac{\frac{2}{3}+1}{(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3})^2} = -\frac{\frac{5}{3}}{\frac{13^2}{9^2}} = -\frac{5}{3} \times \frac{81}{169} = -\frac{135}{169}$
 et $f'(1) = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$.

On a donc $-\frac{135}{169} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{3}$ donc $\frac{1}{3} \leq -f'(x) = |f'(x)| \leq \frac{135}{169}$

Il existe donc un réel $C \in]0, 1[$ tq $\forall x \in [\frac{1}{3}, 1]$, $|f'(x)| \leq C$

$C = \frac{135}{169}$ convient par exemple.

- ②c) Si f est dérivable sur $]a, b[$ et continue sur $[a, b]$ et si $\sup_{C \in]a, b[} |f'(C)| = C \in \mathbb{R}^+$
 alors $|f(b) - f(a)| \leq C |b - a|$

- ②d) On applique l'inégalité des accroissements finis à f sur l'intervalle $[\min(u_n, \alpha), \max(u_n, \alpha)] \subset [\frac{1}{3}, 1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq C |u_n - \alpha|$ or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$
 donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq C |u_n - \alpha|$.

On montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq C^n |u_0 - \alpha|$

Je plus $|u_0 - \alpha| \leq 1$ car $u_0 - \alpha = 1 - \alpha$ et $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1$

donc $-1 \leq -\alpha \leq -\frac{1}{3}$ et $0 \leq 1 - \alpha \leq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ donc $|u_0 - \alpha| = 1 - \alpha \leq 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq C^n \times 1 = C^n$.

- ②e) Pour calculer α à 10^{-3} près, il suffit de choisir $n \in \mathbb{N}$ tel que $C^n \leq 10^{-3}$ si $n \ln C \leq -3 \ln 10$ si $n > -3 \frac{\ln 10}{\ln C}$ car $C \in]0, 1[$
 donc $\ln C < 0$

On prend par ex $m_0 = \lfloor -3 \frac{\ln 10}{\ln C} \rfloor + 1$

On propose comme valeur approchée de α à 10^{-3} près: u_{m_0} .

En effet, $|u_{m_0} - \alpha| \leq C^{m_0} \leq 10^{-3}$ donc $|u_{m_0} - \alpha| \leq 10^{-3}$.

③ a) D'après la définition de f , $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{(1+x+x^2)^{0+1}}$ 3/8
donc $P_0(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'après q1c, $f'(x) = -\frac{2x+1}{(1+x+x^2)^{1+1}}$ donc $P_1(x) = -2x-1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = \frac{6x^2+6x}{(1+x+x^2)^{2+1}}$ donc $P_2(x) = 6x^2+6x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$P_0 = 1, P_1 = -2x-1$ et $P_2 = 6x^2+6x$

③ b) Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$ tq β racine de P_n et P_{n-1} .

Comme $P_n + n(2x+1)P_{n-1} + n(n-1)(1+x+x^2)P_{n-2} = 0$,

ona: $P_n(\beta) + n(2\beta+1)P_{n-1}(\beta) + n(n-1)(1+\beta+\beta^2)P_{n-2}(\beta) = 0$

or $P_n(\beta) = P_{n-1}(\beta) = 0$ donc $n(n-1)(1+\beta+\beta^2)P_{n-2}(\beta) = 0$

or $n \geq 2$ donc $n(n-1) \neq 0$ et $1+\beta+\beta^2 \neq 0$ car $\beta \in \mathbb{R}$ donc $P_{n-2}(\beta) = 0$
et β racine de P_{n-2} .

③ c) On peut montrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

pour tout $k \in \mathbb{N}$ tq $k \leq n$, P_k "est racine de P_{n-k} " est vraie.

Ainsi en particulier on obtient pour $k=n$ que β est racine de P_0
or $P_0 = 1$ n'admet aucune racine réelle donc on arrive à une contradiction. Cela implique que P_n et P_{n-1} n'ont aucune racine réelle commune.

③ d) Supposons que P_n a une racine réelle d'ordre au moins 2. Notons-la β .

Alors $P_n(\beta) = P'_n(\beta) = 0$. Or $P'_n = -(n+1)n P_{n-1}$ et $n(n+1) \neq 0$

si $n \geq 1$ donc comme $P'_n(\beta) = 0$, $-(n+1)n P_{n-1}(\beta) = 0$ donc $P_{n-1}(\beta) = 0$
donc β est racine de P_{n-1}

D'après q ③c, P_n et P_{n-1} n'ont aucune racine réelle commune $\rightarrow$ absurde!

Donc toutes les racines de P_n sont simples!

④ a) $\deg(f) = 3-4 = -1 < 0$ donc $E(f) = 0$. Posons $F = \frac{P}{Q}$ avec $P = X^3 + 5X^2 - 30X + 44$
et $Q = (X^2 + X + 1)(X-3)^2$.

$P(3) = 3^3 + 5 \times 3^2 - 30 \times 3 + 44 = 27 + 45 - 90 + 44 = 26 \neq 0$

$P(j) = j^3 + 5j^2 - 30j + 44 = 1 + 5(-j-1) - 30j + 44 = 45 - 5j - 30j + 44 = 89 - 35j \neq 0$

et $P \in \mathbb{R}[X]$ donc $P(\bar{j}) \neq 0$.

Ainsi F est écrite sous forme irréductible

D'après le cours la décomposition en éléments simples de F est

de la forme: $F = \frac{ax+b}{X^2+X+1} + \frac{c}{(X-3)^2} + \frac{d}{X-3}$

$$\bullet (x^2+x+1)F = \frac{P}{(x-3)^2} = a x + b + \frac{c}{(x-3)^2} + \frac{d}{(x-3)} \quad \frac{4}{8}$$

on évalue en j . On obtient

$$\frac{P(j)}{(j-3)^2} = aj+b \quad \text{càd} \quad \frac{40-35j}{j^2+9-6j} = aj+b \quad \text{càd} \quad \frac{40-35j}{-j-1+9-6j} = aj+b$$

$$\text{ssi} \quad \frac{40-35j}{8-7j} = aj+b \quad \text{ssi} \quad 40-35j = (aj+b)(8-7j)$$

$$\text{ssi} \quad 40-35j = 8aj - 7aj^2 + 8b - 7bj$$

$$\text{ssi} \quad 40-35j = 8aj + 7aj + 7a + 8b - 7bj$$

$$\text{ssi} \quad 40 - 7a - 8b = j(35 + 15a - 7b)$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} 40 - 7a - 8b = 0 \\ 35 + 15a - 7b = 0 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} 280 - 49a - 56b = 0 \\ 280 + 120a - 56b = 0 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} -169a = 0 \\ 280 + 120a - 56b = 0 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{280}{56} = 5 \end{cases}$$

$$\bullet (x-3)^2 F = \frac{P}{x^2+x+1} = \frac{(ax+b)}{x^2+x+1} (x-3)^2 + c + d(x-3)$$

on évalue en 3. On obtient

$$\frac{P(3)}{3^2+3+1} = c \quad \text{donc} \quad c = \frac{26}{13} = \boxed{2=c}$$

$$\bullet F(0) = \frac{b}{1} + \frac{c}{(-3)^2} + \frac{d}{-3} \quad \text{or} \quad F(0) = \frac{44}{9}$$

$$\text{donc} \quad 5 + \frac{2}{9} + \frac{d}{-3} = \frac{44}{9} \quad \text{donc} \quad \frac{45 + 2 - 3d}{9} = \frac{44}{9} \quad \text{donc} \quad -3d = -3$$

$$\text{donc} \quad \boxed{d=1}$$

$$\text{Concl:} \quad F = \frac{5}{x^2+x+1} + \frac{2}{(x-3)^2} + \frac{1}{x-3}$$

④ b) h est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ car le pôle de F dans $\mathbb{R}$ est 3 (un seul pôle réel)
 h est une f. étim. rationnelle donc elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$,

$$h^{(n)}(x) = 5 \times f^{(n)}(x) + 2 \times \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x-3)^{n+2}} + \frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$$

$$h^{(n)}(x) = 5 \times \frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}} + 2 \times \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x-3)^{n+2}} + \frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$$

Ex 2

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Comme $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$,

5/8

$$X^2 + X + 1 \mid (X^{4+1})^n - X^n \text{ dans } \mathbb{R}[X]$$

ssi j et j^2 sont racines de $P_n = (X^{4+1})^n - X^n$

ssi $P_n(j) = 0$ et $P_n(j^2) = 0$ car $j^2 = \overline{j}$

ssi $P_n(j) = 0$ car $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$

or $P_n(j) = 0$ ssi $(j^{4+1})^n - j^n = 0$ ssi $(j+1)^n = j^n$ ssi $(j^2)^n = j^n$

ssi $(e^{i\frac{\pi}{3}})^n = (e^{\frac{2i\pi}{3}})^n$ ssi $\frac{n\pi}{3} \equiv \frac{2n\pi}{3} [2\pi]$

ssi $\frac{n\pi}{3} \equiv 0 [2\pi]$ ssi $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $\frac{n\pi}{3} = 2k\pi$

ssi $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $n = 6k$ ssi $n \equiv 0 [6]$

Donc $X^2 + X + 1 \mid P_n$ dans $\mathbb{R}[X]$ ssi $n \equiv 0 [6]$.

② a)

$$P_2 = X^2 - 2$$

$$P_3 = X^3 - 3X$$

② b)

Soit $\mathcal{P}(n)$: "le terme de plus haut degré de P_n est: X^n "

Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{P}(n)$ vraie par réc double

• initialisation: $P_0 = 2$ et $P_1 = X$ et $P_2 = X^2 - 2$ donc $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies

• hérédité: supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies pour un n fixé, $n \geq 1$

$P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n$. Le terme de plus haut degré de P_{n+1} est X^{n+1} par HR et celui de P_n est X^n donc le terme de plus haut degré de P_{n+2} est $X \times X^{n+1} = X^{n+2}$ donc $\mathcal{P}(n+2)$ vraie

• concl $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Si $n = 0$, $\deg(P_0) = 0$ et le coeff dominant de P_0 est 2

Si $n \geq 1$, $\deg(P_n) = n$ _____ P_n est 1.

② c) Soit $\mathcal{P}(n)$: " $\forall z \in \mathbb{C}, P_n(z + \frac{1}{z}) = 2^n + \frac{1}{2^n}$ " Mq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ vraie par réc double

• initialisation: soit $z \in \mathbb{C}$, $P_0(z + \frac{1}{z}) = 2$ et $2^0 + \frac{1}{2^0} = 1 + 1 = 2$

donc $\mathcal{P}(0)$ vraie. $P_1(z + \frac{1}{z}) = z + \frac{1}{z}$ et $2^1 + \frac{1}{2^1} = 2 + \frac{1}{2}$ donc $\mathcal{P}(1)$ vraie aussi

• hérédité: supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies pour un n fixé $n \geq 0$.

$$P_{n+2}(z + \frac{1}{z}) = (z + \frac{1}{z}) P_{n+1}(z + \frac{1}{z}) - P_n(z + \frac{1}{z}) \text{ par def de } P_{n+2}$$

$$= (z + \frac{1}{z}) (z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}) - (z^n + \frac{1}{z^n}) \text{ par HR}$$

$$= z^{n+2} + \frac{1}{z^n} + z^n + \frac{1}{z^{n+2}} - z^n - \frac{1}{z^n}$$

$$= z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} \text{ donc } \mathcal{P}(n+2) \text{ vraie}$$

• Concl $\forall m \in \mathbb{N}$ P_m vraie

6/8

(2d) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$

$$P_m(2\cos\theta) = P_m(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = P_m\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) = (e^{i\theta})^m + \left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^m \\ = e^{im\theta} + e^{-im\theta} = 2\cos(m\theta)$$

(2e) Soit $x \in [-2, 2]$ Il existe $\theta \in [0, \pi]$ unique tel que $x = 2\cos\theta$

$$P_m(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(m\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{2n}$$

Donc $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $x_k = 2\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2n}\right)$ sont racines distinctes de P_m

Il y en a n et P_m est de degré n d'après q 2.b donc ce sont les n racines de P_m .

Exercice 3: Soit $x \in \mathbb{R}^*$

(1a) $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x^2)\right)$ et $1+x^2 > 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \ln(1+x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fcts cont

$x \mapsto \frac{1}{x} \ln(1+x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par produit de fcts cont

$x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x^2)\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par composée de fcts cont

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \exp(y) = e^0 = 1 = f(0)$$

$$\text{en effet, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \ln(1)}{x - 0} = g'(0) = 0.$$

$$\text{car } g: x \mapsto \ln(1+x^2) \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = \frac{2 \times 0}{1+0^2} = 0$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, f est cont en 0.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$

(1b) f est continue sur $\mathbb{R}$ et f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fcts dér. f est de la forme e^u (de dérivée $u' e^u$)

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{x} \times \frac{2x}{1+x^2}\right) \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x^2)\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} = h'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\text{car } h: x \mapsto \ln(1+x) \text{ est dér en } 0 \text{ et } h'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1+x^2} = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x^2)\right) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = (-1+2) \times 1 = 1 \times 1 = 1$$

Par le théorème de la limite monotone, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

②a

h est une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$
comme somme et produit de fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$
De plus,

$$h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a)$$

$$= f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b)$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$$

On a donc $h(a) = h(b)$.

On peut appliquer le théorème de Rolle: $\exists c \in]a, b[/ h'(c) = 0$.

$$\text{or } \forall x \in]a, b[, h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$$

$$c \text{ vérifie donc } (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

②b

Pour $g(x) = x$ (g vérifie bien les conditions de l'énoncé),

le résultat précédent montre qu'il existe $c \in]a, b[$

$$\text{tel que } (f(b) - f(a)) = (b - a)f'(c) \text{ c'âd } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On retrouve donc la formule des accroissements finis.

②c

Avec $f(a) = g(a) = 0$, le résultat précédent devient:

il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b)g'(c) = g(b)f'(c)$. Soit $x \in]a, b[$
comme le quotient $\frac{f}{g}$ a un sens sur $]a, x[$ et que g ne s'annule qu'en

$$a, \text{ on peut écrire: } \exists c_x \in]a, x[, \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Quand x tend vers a , c_x tend vers a et on obtient:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x \rightarrow a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x \rightarrow a} \frac{f'}{g}(c_x) = l$$

On obtient donc que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

②e

La réciproque de cette règle est fautive: prenons les fonctions f et g imposées. f et g sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et dérivables en tout point de $\mathbb{R}^+$. On a de plus $f(0) = g(0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

$$\text{or } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \text{ et } g'(x) = 1$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

le rapport $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'a pas de limite en 0.

$$\textcircled{2} \textcircled{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = 1$$

8/8

en effet: soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = e^x$
 $x \mapsto e^x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$$g: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(1+x)$$

g est continue sur $[0; +\infty[$
 et dérivable sur $]0; +\infty[$
 g ne s'annule qu'en 0.
 et $g'(x) = \frac{1}{1+x}$

$$f(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$g(0) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)e^x = 1.$$

donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$$

