

Partie I : Description fonctionnelle de la pendulation

Question 1 : Donner le schéma bloc fonctionnel permettant de décrire le dispositif d'asservissement de la position $y(t)$ de la tige de vérin à la position de consigne $y_c(t)$. Préciser les noms des composants de chaque bloc ainsi que les grandeurs physiques intermédiaires et leur unité.

$y_c(t), y(t)$ en mètre
 $u_c(t), u(t), u_r(t)$ en Volt
 $i(t)$ en ampères (A)
 $q(t)$ en m^3/s

Partie II : Modélisation du vérin et de sa charge

Question 2 : Passer les équations (1) à (6) dans le domaine de Laplace

On se place dans les conditions de Heaviside

L'équation 1 donne : $R\alpha_2(p) = Y(p)$

L'équation 2 donne : $Q(p) = 2SV(p) + \frac{V_0}{b}p\Sigma(p)$

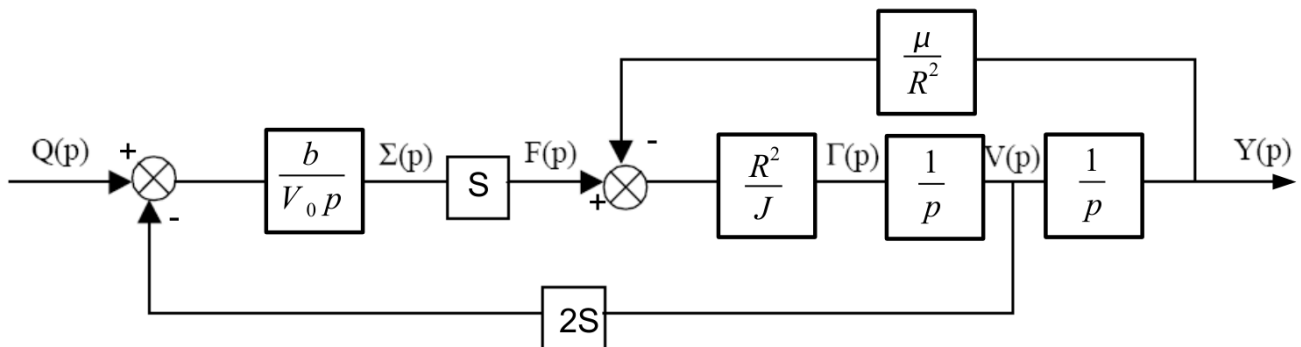
3 devient : $F(p) = S\Sigma(p)$

4 donne $Jp^2\alpha_2(p) = F(p)R - \mu\alpha_2(p)$

5 et 6 deviennent : $V(p) = pY(p)\Gamma(p) = pV(p)$

Question 3 : Compléter le schéma bloc du document réponse représentant les équations de comportement du vérin. Ce schéma admet $Q(p)$ comme entrée et $Y(p)$ comme sortie. (Préciser la transmittance de chaque bloc ainsi que les signes des entrées des comparateurs). (Indice : on pensera à transformer l'équation 4 pour faire apparaître Γ et Y afin de compléter facilement le schéma-bloc)

On obtient directement à partir des équations 1, 2, 3, 5 et 6.



On modifie également 4 qui devient : $\frac{J}{R^2}\Gamma = F - \frac{\mu}{R^2}Y$ d'où le schéma-bloc

On pose : $k = \frac{\mu}{R^2}$ et $M = \frac{J}{R^2}$

Question 4 : Déterminer la fonction de transfert entre la position de la tige du vérin et le débit d'huile entrant dans le vérin : $H_1(p) = \frac{Y(p)}{Q(p)}$ en fonction de b, k, M, S et V_0 .

On remplace les valeurs de k et M .

On déplace la jonction à droite de $1/p$ pour obtenir :

En déplaçant la jonction et en ajoutant un bloc de transmittance « p » dans la boucle de retour pour obtenir un schéma-bloc équivalent, on fait apparaître une boucle fermée interne. On pose $H_2(p)$ sa fonction de transfert

La détermination de H_2 et par la suite de la FTBF H_1 complète ne pose alors pas de difficulté et nécessite simplement la connaissance de la relation $FTBF = \text{chaîne directe} / (1 + FTBO)$

$$H_2(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{1}{Mp^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{Mp^2}} = \frac{1}{Mp^2 + k}$$

$$\text{et } H_1(p) = H_2(p) \frac{bS}{pV_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2S^2 b H_2(p)}{V_0}} = \frac{bS}{pV_0(Mp^2 + k) + 2S^2 bp}$$

Question 5 : Montrer que cette fonction de transfert s'écrit sous forme canonique : $H_1(p) = \frac{\delta}{p(1 + \frac{p^2}{\beta^2})}$,

où l'on précisera les valeurs de δ et de β :

$$H_1(p) = \frac{Y(p)}{Q(p)} = \frac{1}{Mp^2 + 2S^2 b + kV_0} \frac{bS}{p} = \frac{\delta}{1 + \frac{p^2}{\beta^2}} \frac{1}{p}$$

$$\text{avec } \delta = \frac{Sb}{kV_0 + 2S^2 b} \beta^2 = \frac{kV_0 + 2S^2 b}{MV_0}$$

Question 6 : Donner son gain, sa classe et son ordre.

Gain : δ , ordre : 3, classe : 1

Question 7 : Déterminer la **réponse $y(t)$ indicielle** (entrée $q(t)$ unitaire).

On impose $q(t) = u(t)$ (échelon unitaire)

Ainsi $Q(p) = 1/p$

$$\text{d'où } Y(p) = \frac{\delta}{p^2(1 + \frac{p^2}{\beta^2})}$$

$$\text{La décomposition en éléments simples donne : } Y(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{(Cp + D)}{1 + \frac{p^2}{\beta^2}}$$

On calcule $p^2 Y(p)$ en $p = 0$ pour obtenir $A = \delta$

$$\text{On évalue } (1 + \frac{p^2}{\beta^2}) Y(p) \text{ en } p = i\beta \text{ pour obtenir } C\beta i + D = \frac{-\delta}{\beta^2}$$

$$\text{Ainsi } C = 0 \text{ et } D = \frac{-\delta}{\beta^2}$$

On calcule la limite en l'infini de $pY(p)$ pour obtenir $B = 0$

$$\text{On a donc au final : } Y(p) = \delta \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(\beta^2 + p^2)} \right)$$

La réponse temporelle est alors : $y(t) = \delta u(t) - \frac{1}{\beta} \sin(\beta t)$ (expression homogène bien sûr)

Partie III : Amélioration des performances

Question 8 : Déterminer la FTBO (pour la boucle de vitesse seulement).

$$\text{La FTBO est } \frac{KAG\delta g(1 + \tau p)}{1 + \frac{p^2}{\beta^2}}$$

Question 9 : En déduire la fonction de transfert en boucle fermée : $H_2(p) = \frac{V(p)}{V_c(p)}$

On utilise la relation : chaîne directe . $1 / (1 + FTBO)$

$$H_2 = \frac{KAG\delta}{1 + \frac{p^2}{\beta^2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(1 + \tau p)gKAG\delta}{1 + \frac{p^2}{\beta^2}}} = \frac{KAG\delta}{1 + \frac{p^2}{\beta^2} + (1 + \tau p)gKAG\delta}$$

Question 10 : Mettre $H_2(p)$ sous la forme canonique d'un second ordre.

En développant, on obtient : $H_2 = \frac{KAG\delta}{1 + gKAG\delta + \tau gKAG\delta p + \frac{p^2}{\beta^2}} = \frac{KAG\delta}{1 + gKAG\delta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tau gKAG\delta}{1 + gKAG\delta} p + \frac{p^2}{\beta^2(1 + gKAG\delta)}}$

Question 11 : En déduire les expressions de K_2 gain de H_2 , z coefficient d'amortissement et ω_0 pulsation propre non amortie (préciser leur unité) en fonction de K, A, G, g, δ, τ et β .

On identifie à l'expression d'un second ordre :

Soit $K_2 = \frac{KAG\delta}{1 + gKAG\delta}$ sans unité

$2 \frac{z}{\omega_0} = \frac{\tau gKAG\delta}{1 + gKAG\delta}$

$\omega_0^2 = \beta^2(1 + gKAG\delta)$

Ainsi $\omega_0 = \beta \sqrt{1 + gKAG\delta}$ en rad/s

et $z = \frac{1}{2} \frac{\beta \tau gKAG\delta}{\sqrt{1 + gKAG\delta}}$ sans unité

Question 12 : Faire l'application numérique en exprimant les constantes en fonction de K et τ

On utilisera les valeurs suivantes : $A \cdot G = \frac{1}{300} m^3 \cdot s^{-1} \cdot V^{-1}$; $g = 10 V \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$; $\delta = 28.1 m^{-2}$; $\beta = 77 rad \cdot s^{-1}$

$z = 36.1 \frac{\tau K}{\sqrt{1 + 0.94K}}$

$K_2 = 0.094 \frac{K}{1 + 0.94K}$

$\omega_0 = 77 \sqrt{1 + 0.94K}$

□

Question 13 : En utilisant l'abaque du temps de réponse réduit $Tr(Tr = t_5 \cdot \omega_0)$ en fonction de z et les expressions précédentes, en déduire les valeurs numériques de K et τ qui permettent d'obtenir un système performant.

Pour $z=0.7$, on obtient $Tr=3$ soit $\omega_0 = \frac{3}{t_{5\%}} = \frac{3}{0.017} = 177 rad/s$

On en déduit alors la valeur de K à partir de l'expression précédente :

$K = 4.56$

Avec l'expression de $z = 0.7$, on obtient $\tau = 0.0098s$

Question 14 : Quelle valeur doit-on donner au conditionneur (repéré *cond* sur le schéma-bloc) pour que le schéma-bloc puisse être mis sous forme de schéma-bloc à retour unitaire ?

Pour avoir un retour unitaire, il faut avoir un bloc *cond* = h

Question 15 : Donner la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement de position ?

$FTBO = H_2 \cdot \frac{h}{p}$

Question 16 : Exprimer l'écart $\varepsilon_p(p) = Y_c(p) - Y(p)$ en fonction de la consigne $Y_c(p)$ et de la FTBO.

$$\varepsilon_p = Y_c - Y = Y_c - FTBO \varepsilon_p$$

$$\text{Soit } \varepsilon_p = \frac{Y_c}{1+FTBO}$$

Question 17 : En déduire l'écart statique pour une entrée échelon de valeur $y_c(t) = y_0 u(t)$. Que peut-on en déduire sur la boucle d'asservissement en position ?

$$\text{Pour une entrée en échelon on a } \varepsilon_p = \frac{y_0}{p} \cdot \frac{1}{1+FTBO(p)}$$

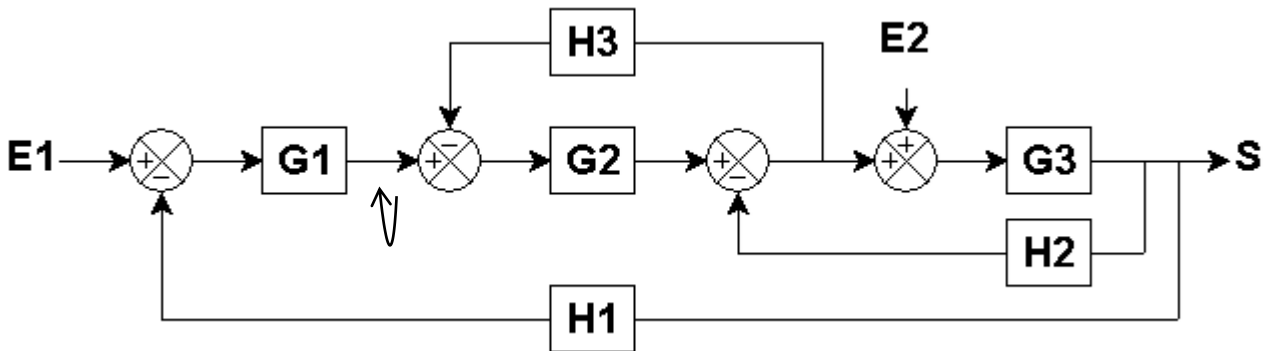
$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_p(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_p(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{y_0}{1+FTBO(p)}$$

$$\text{Or } \lim_{p \rightarrow 0} FTBO(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a_0}{p(1+b_1p+b_2p^2)} = \infty$$

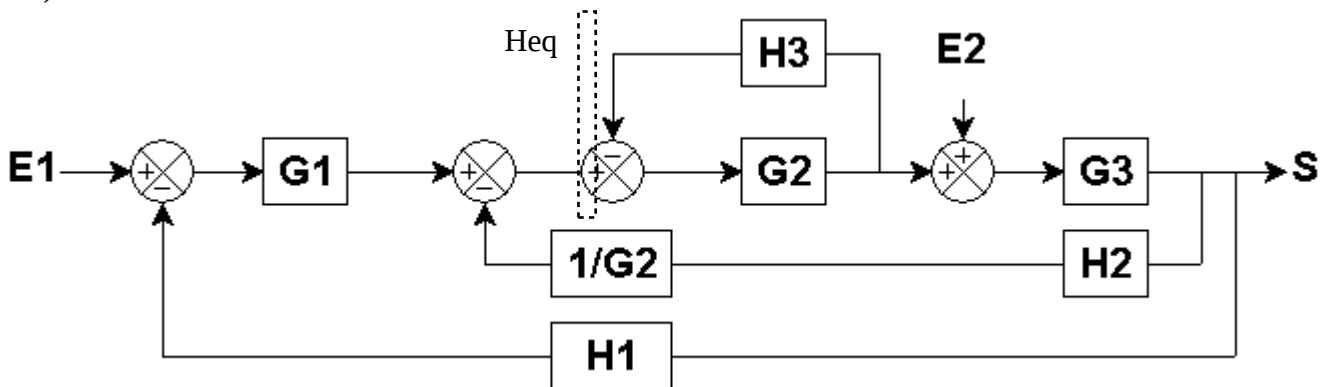
$$\text{donc } \varepsilon_s = 0$$

La boucle d'asservissement en position est donc précise.

Exercice supplémentaire

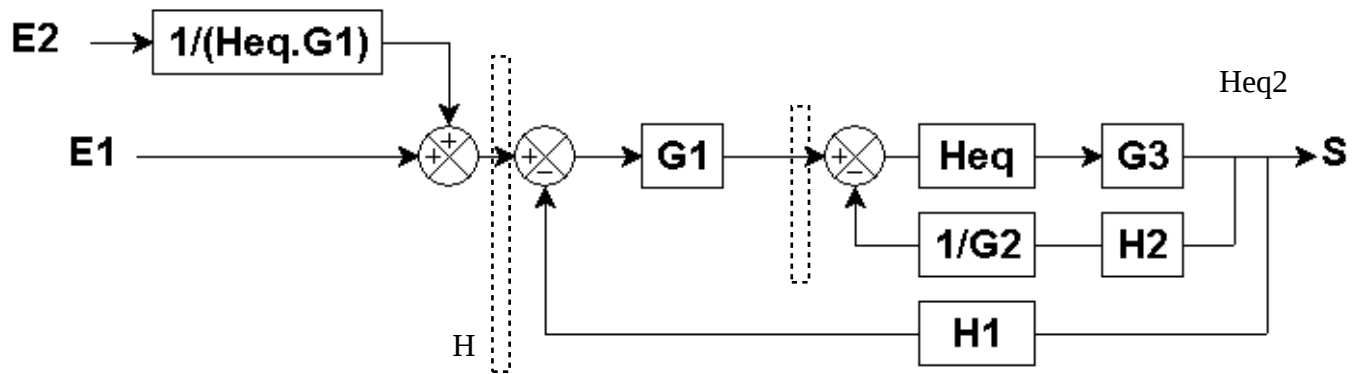


On déplace le 3ème sommateur à gauche du second et on simplifie la boucle centrale (de chaîne directe G2)



$$Heq = \frac{G2}{1 + G2.H3}$$

On déplace ensuite le dernier sommateur au début du schéma-bloc et on simplifie les deux boucles imbriquées.



$$Heq2 = \frac{Heq.G3}{1 + \frac{Heq.G3.H2}{G2}} = \frac{G2.G3}{1 + G2.H3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{G3.H2}{1 + G2.H3}} = \frac{G2.G3}{1 + G2.H3 + G3.H2}$$

$$H = \frac{G1.Heq2}{1 + G1.Heq2.H1}$$

$$H = \frac{G1.G2.G3}{1 + G2.H3 + G3.H2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{G1.G2.G3.H1}{1 + G2.H3 + G3.H2}} = \frac{G1.G2.G3}{1 + G2.H3 + G3.H2 + G1.G2.G3.H1}$$

$$S = H \cdot E1 + \frac{E2}{Heq.G1} = H \cdot E1 + \frac{H}{Heq.G1} E2$$

On a donc

$$A1 = H = \frac{G1.G2.G3}{1 + G2.H3 + G3.H2 + G1.G2.G3.H1}$$

$$A2 = \frac{H}{Heq.G1} = \frac{\frac{G1.G2.G3}{1 + G2.H3 + G3.H2 + G1.G2.G3.H1}}{G3} \cdot \frac{1 + G2.H3}{G2.G3}$$

$$= G3 \cdot \frac{1 + G2.H3}{1 + G2.H3 + G3.H2 + G1.G2.G3.H1}$$