Logique et raisonnements.

1 Proposition

Définition 1.

On appelle assertion ou proposition une phrase qui est soit vraie soit fausse (et pas les deux).

Une proposition peut dépendre d'une variable x, et on la note alors $A(x)$.

On appelle table de vérité d'une proposition le tableau donnant sa valeur de vérité en fonction de celles des propositions utilisées pour la construire.

On dit que deux propositions A et B sont équivalentes, ce que l'on note $A \equiv B$,

Ssi elles ont toujours la même valeur de vérité.

• *Exemples*

"2 est plus petit que 3 " est une proposition vraie;

"5 est plus grand que 3 " est une proposition fausse;

la proposition $A(x)$ = " x est un nombre premier" dépend de x. elle est vraie si $x = 2$ et fausse si $x = 10$ par exemple.

Définition 2.

Soit A et B sont deux propositions, on définit les propositions suivantes :

1. **Négation :** (non A), notée $\neg A$ ou $\overline{A}$: (non A) est vraie si A est fausse, et fausse sinon.
2. **Et :** (A et B), notée $A \wedge B$:
   (A et B) est vraie si les deux propositions sont vraies, et fausse sinon. On l'appelle la conjonction.
3. **Ou mathématique :** (A ou B), notée $A \vee B$:
   (A ou B) est vraie si l'une des deux propositions est vraie, et fausse sinon. On l'appelle la disjonction.
4. **Ou Restaurant :**

• *Exemples :* On considère les proposition. A = "n est un multiple de 2 " et B = " n est un multiple de 3 ", alors :

(non A) = " n est impair"

(A ou B) = " n est divisible soit par 2 , soit par 3 "

(A et B) = "n est un multiple de 6 " (par théorème de Gauss)

La négation, la disjonction et la conjonction ont pour tables de vérité :

A	non A
V	F
F	V

A	B	A et B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	B	A Ou restaurant B
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Théorème 3.
Soit A, B, C sont des propositions, on a les propriétés suivantes :

1. Double négation : non(non A) $\equiv A$.
2. Parenthésage : $\Big[(A\, et\, B)\, et\, C\Big] \equiv \Big[A\, et\, (B\, et\, C)\Big]$ et $\Big[(A\, ou\, B)\, ou\, C\Big] \equiv \Big[A\, ou\, (B\, ou\, C)\Big]$
3. Distributivité ou loi de Morgan
   A et (B ou C) $\equiv$ (A et B) ou (A et C) ; et A ou (B et C) $\equiv$ (A ou B) et (A ou C) ;
4. Le meilleur pour la fin
   non (A et B) $\equiv$ [(non A) ou (non B)] et non(A ou B) $\equiv$ [(non A) et (non B)].

Démonstration. Par exemple, montrons la dernière. On procède par table de vérité :

A	B	A ou B	non (A ou B)	non A	non B	(non A) et (non B)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

2 Quantificateurs

Définition 4.

Soit $A(x)$ une proposition dépendant de x, qui décrit un ensemble E :

1. Lorsque x décrit E, $A(x)$ est toujours vraie, on écrit : $\forall x \in E,\ A(x)$
   qu'on lit "quel que soit x, pour tout x appartenant à E, $A(x)$ est vrai ".
   C'est le quantificateur universel.

2. Lorsqu'il existe un (ou plusieurs) x dans E tel que $A(x)$ est vraie, on écrit : $\exists x \in E,\ A(x)$
   qu'on lit "il existe un (ou plusieurs) x appartenant à E tel que $A(x)$ est ".
   C'est le quantificateur existentiel.

Remarques lorsqu'il existe un unique x pour lequel $A(x)$ est vrai, on écrit : $\exists! x \in E, A(x)$

Théorème 5. Négation, Ordre, Factorisation

Soit $A(x)$ une proposition dépendant de x, qui décrit un ensemble E :

1. **Négation :** non$\Big(\forall x \in E,\ A(x)\ est\ vraie\Big) \equiv \Big(\exists x \in E,\ A(x)\ est\ fausse\Big)$
   et non$\Big(\exists x \in E,\ A(x)\ est\ vraie\Big) \equiv \Big(\forall x \in E,\ A(x) est\ fausse\Big)$.
2. **Ordre :** L'ordre des quantificateurs est important. Par exemple les propositions :
   $$[\forall x \in E, \exists y \in E, A(x, y)] \text{ et } [\exists y \in E, \forall x \in E, A(x, y)]$$
   ne sont pas les mêmes : dans la première, y dépend de x ; dans la seconde, y est indépendant de x.
3. **Factorisation :** Même si on a la flemme, on ne factorise pas les quantificateurs

• *Exemple d'ordre*

> $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n < m$ signifie : pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que $n < m$.
Elle est vraie : pour chaque n fixé, l'entier $m = n + 1$ convient.

> $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n < m$ signifie : il existe un entier naturel m tel que, pour tout entier naturel $m, n < m$.
Elle est fausse : si $n = m$ par exemple, on ne pourra pas avoir $n < m$.

Exercice 1. [Correction] Écrire avec des quantificateurs

1. n est un entier pair.
2. Soit $n, p \in \mathbb{N}$. Traduire p $divise$ n.

Exercice 2. [Correction] Soit f une fonction réelle définie de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Écrire au moyen de quantificateurs les propositions suivantes :

1. La fonction f ne prend pas de valeur négative.
2. f est π-périodique.
3. La fonction f est constante égale à 1492
4. L'équation $f(x) = 0$ a une (ou plusieurs) solution.
5. L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
6. f est croissante.
7. La courbe représentative de fonction f coupe celle de la fonction ln.
8. f prend au moins une fois la valeur 1.
9. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
10. Tout réel a (au moins) un antécédent par f.
11. Tout réel a (au moins) deux antécédents par f.

3 Autour de $A \implies B$

Définition 6.

Soient A, B sont deux propositions.

1. si, dès que A est vraie, alors B est aussi vraie : on dit que A implique B, que l'on note $A \implies B$

   Vocabulaire : A est une condition suffisante pour B, ou que B est une condition nécessaire pour A.
2. si A implique B ET B implique A : on dit que A est équivalent à B, que l'on note $A \iff B$

   on dit alors que : A est une condition nécessaire et suffisante pour B ou bien A Ssi B.

Les tables de vérités correspondantes sont :

A	B	$A \implies B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A	B	$A \iff B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

• *Exemple d'implication*

1. Si toto est français alors toto est européen
2. Si n est un multiple de 6 alors n est un entier
3. Si $x = 1$ alors $x^2 = 1$
4. Le théorème de Pythagore

Théorème 7.

1. **Négation :** $[non(A \implies B)] \equiv [A \text{ et } (non B)]$.
2. **Réciproque :** La réciproque de $A \implies B$, c'est l'implication $B \implies A$.

   Il n'y a pas de lien de vérité entre une implication et sa réciproque.
3. **Contraposée :** la contraposée de $A \implies B$, c'est l'implication $(non B) \implies (non A)$.

   Une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité, elles sont équivalentes.

Démonstration. Par tables de vérité.

A	B	$A \implies B$	$non(A \implies B)$	A	$non B$	A et $(non B)$
V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F

A	B	$A \Longrightarrow B$	$B \Longrightarrow A$	non B	non A	(non B) $\Longrightarrow$ (non A)
V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Exercice 3. [Correction] Exprimer la contraposée de chacun des énoncés suivants :

1. Je ne sais pas écrire le mot contraposée, donc je ne vais pas réussir à faire cet exercice.
2. Je suis un génie des mathématiques, donc j'ai choisi de faire une MPSI.
3. Tous les vieux sont des aigris, donc ce vieux prof de math ne va mettre que des mauvaises notes aux DS.

4 Comment démontrer $A \Longrightarrow B$.

4.1 Raisonnement direct par déduction

On suppose A est vraie

$\boxed{\textit{On va montrer alors que B est vraie.}}$

• Exemple : Soit n un entier. Montrer que : Si n est impair alors n^2 est impair.

4.2 Raisonnement direct avec disjonction

• Exemple. Montrer que : pour tout entier naturel n, le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Comme n est un entier il y a 2 situations

Situation : n est pair	Situation : n est impair

Conclusion : pour tout entier naturel n, on a bien que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

4.3 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition est vraie, on peut montrer qu'elle n'est pas fausse.

CàD on suppose que la proposition est fausse, et on cherche à aboutir à une contradiction

• Exemple 1. Soit n un entier. Montrer que : Si n^2 est pair alors n est pair.

• Exemple 2. Montrer que : $\sqrt{2}$ est irrationnel, CàD n'est pas de la forme $\pm\frac{a}{b}$ avec $a, \in \mathbb{N}^*$.

4.4 Raisonnement par contraposition

On sait que : l'implication directe $A \Longrightarrow B$ et sa contraposée (non B) $\Longrightarrow$ (non A) sont équivalentes.

Si on démontre que la contraposée est vrai alors l'implication directe $A \Longrightarrow B$ est vraie

• Exemple. Exemple 1. Soit n un entier. Montrer que : Si n^2 est pair alors n est pair.

5 Raisonnement par analyse-synthèse

Pour montrer qu'un problème admet une solution (unique), on peut procéder en deux temps :

> l'analyse : on montre qu'une hypothétique solution est nécessairement d'une certaine forme (ce qui réduit les solutions possibles).

> puis la synthèse : on regarde, parmi les solutions possibles de l'analyse, lesquelles sont bien des solutions.

• Exemple 1 : Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sqrt{x+2} = x$.

> *Analyse* : on a les implications

$$\sqrt{x+2} = x \implies x+2 = x^2 \implies x^2 - x - 2 = 0$$

et on arrive donc à une équation polynomiale du second degré, que l'on sait résoudre.

Comme $\Delta = 1+8 = 9 = 3^2$, donc les solutions possibles sont $r = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $r' = \dfrac{1+3}{2} = 2$.

> *synthèse* : Comme $\sqrt{r+2} = 1 \neq -1 = r$ et $\sqrt{r'+2} = 2 = r'$,

Conclusion l'équation admet l'unique solution $x = 2$

• Exemple 2 : Montrer que toute fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière (unique) comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Analyse :

On suppose qu'il existe deux fonctions $g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que : g est paire, h est impaire et $f = g + h$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} g(-x) = g(x) \\ h(-x) = -h(x) \\ f(x) = g(x) + h(x) \\ \text{Et aussi } f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} g(x) + h(x) = f(x) \\ g(x) - h(x) = f(-x) \end{cases}$$

En prenant la somme et la différence des deux lignes du système, on trouve :

$$\text{Pour tout } x,\ g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

donc nécessairement, forcément : Si g et h existent, elle sont définies par les formules ci-dessus. (Ce qui prouve l'unicité).

Synthèse

Considérons g, h définies par les formules ci-dessus.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $g(-x) = \dfrac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$, donc g est paire ;
- $h(-x) = \dfrac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x)$, donc h est impaire
- $g(x) + h(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$, donc $f = g + h$.

Donc les fonctions g, h définies par les formules ci-dessus, conviennent

Conclusion : On a bien l'existence (et l'unicité) d'une telle écriture.

6 Raisonnement par récurrence

Théorème 8. Raisonnement par récurrence

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $H_{<n>}$ l'hypothèse de récurrence

1. Récurrence à simple (à 1 étage).

   On suppose que

   > Initialisation : $H_{<0>}$ est vraie.

   > Hérédité : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ H_{<n>} \implies H_{<n+1>}$

   $$\text{Alors } \forall\, n \in \mathbb{N},\ H_{<n>} \text{ est vraie.}$$

2. Récurrence à double (à 2 étages).

   On suppose que

   > Initialisation : $H_{<0>}$ et $H_{<1>}$ sont vraies

   > Hérédité : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ [H_{<n>}\ et\ H_{<n+1>}] \implies H_{<n+2>}$

   $$\text{Alors } \forall\, n \in \mathbb{N},\ H_{<n>} \text{ est vraie.}$$

3. Récurrence forte.

   On suppose que

   > Initialisation : $H_{<0>}$ est vraie

   > Hérédité : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ [H_{<0>}, H_{<1>}, ..., H_{<n>}] \implies H_{<n+1>}$

   $$\text{Alors } \forall\, n \in \mathbb{N},\ H_{<n>} \text{ est vraie.}$$

Exemple

> Récurrence simple : Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 \overset{def}{=} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

> Récurrence double : Autour de la suite de Fibonacci

> récurrence forte : tout entier naturel non nul s'écrit comme produit de nombres premiers.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. n est un entier pair Ssi $\exists p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p$
2. Soit $n, p \in \mathbb{N}$.
   $p\ divise\ n$ Ssi $\exists p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = p.k$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. La fonction f ne prend pas de valeur négative.
   Ssi $\forall\, x \in \mathscr{D},\ f(x) > 0$
2. f est π-périodique.
   Ssi $\forall\, x \in \mathscr{D},\ f(x+\pi) = f(x)$
3. La fonction f est constante égale à 1492
   Ssi $\forall\, x \in \mathscr{D},\ f(x) = 1492$
4. L'équation $f(x) = 0$ a une (ou plusieurs) solution
   Ssi $\exists\, r \in \mathscr{D},\ f(r) = 0$
5. L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution
   Ssi $\forall\, x \in \mathscr{D},\ f(x) \neq 0$
6. f est croissante
   Ssi $\forall\, x, x' \in \mathscr{D},\ \left[x \leqslant x' \implies f(x) \leqslant f(x')\right]$
7. La courbe représentative de fonction f coupe celle de la fonction $\ln$
   Ssi $\exists\, c \in \mathscr{D},\ f(c) = \ln(c)$
8. f prend au moins une fois la valeur 1
   Ssi $\exists\, c \in \mathscr{D},\ f(c) = 1$
9. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur
   Ssi $\forall\, x, x' \in \mathscr{D},\ \left[x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')\right]$
   Ou bien $\forall\, x, x' \in \mathscr{D},\ \left[f(x) = f(x') \implies x = x'\right]$
10. Tout réel a (au moins) un antécédent par f
    Ssi $\forall b \in \mathbb{R},\ \exists a \in \mathscr{D}$ tel que $b = f(a)$.
11. Tout réel a (au moins) deux antécédents par f
    Ssi $\forall b \in \mathbb{R},\ \exists a, a' \in \mathscr{D}$ tel que $a \neq a'$ et $b = f(a) = f(a')$.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Je ne sais pas écrire le mot contraposée, donc je ne vais pas réussir à faire cet exercice.
   je vais réussir à faire cet exercice donc Je sais écrire le mot contraposée.
2. Je suis un génie des mathématiques, donc j'ai choisi de faire une MPSI.
   j'ai choisi de faire une PCSI donc je ne suis pas un génie des mathématique.
3. Tous les vieux sont des aigris, donc ce vieux prof de math ne va mettre que des mauvaises notes aux DS.
   Le vieux prof de math a mis des bonnes notes aux DS donc il est jeune et pas aigris.