Calculs algébriques.

1 Quand on a des facteurs, on les garde!

Définition 1. Le produit se distribue toujours sur l'addition

$\forall\ a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a

$$a.\left(b+b'\right) = a.b + a.b' \text{ et } \left(a+a'\right).b = a.b + a'.b$$

Conséquence

Zéro est absorbant, CàD $\forall\ a \in \mathbb{C}$, $a.0 = 0$ et $0.a = 0$

Démonstration : On suppose que $a \in \mathbb{R}$

On va montrer que $a.0 = 0$

on va calculer $a.(a+0)$

→ D'une part $a.(a+0) = a.a + a.0$ car le produit se distribue.

→ D'autre part $a.(a+0) = a.a$ car $a+0 = a$

Conclusion : $a.a + a.0 = a.a$

$\Longrightarrow a.0 = 0$ fini

On fait de même pour démontrer $0.a = 0$.

`Cette démonstration n'utilise que les propriétés élémentaires de zéro et la distributivité, donc elle est valide dans tous les situations où il y a le mot produit, CàD avec des fonctions, des matrices, le produit scalaire ou le produit vectoriel.`

Théorème 2. Chercher et garder les facteurs

Recherche des facteurs.

Même si au lycée personne ne parle des facteurs,
il faut rechercher les facteurs *et les garder.*

Kulture indispensable.

La factorisation remarquable $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

Et quand on a des facteurs, on les garde!

`Et quand on a des facteurs, on les garde !`

2 Produit, Fraction

Théorème 3. Quelques propriétés qu'il est bon de rappeler

> *Quotient de fractions*

On sait que $\dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$ et surtout

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a/b}{c/1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} \quad et \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a/1}{b/c} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{b}$$

> *Somme de fractions*

On sait que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{Haut}{Bas} = \cdots,$

Attention en pratique : La Bas n'est pas obligatoirement le plus gros possible.

3 Puissances/exponentielle.

3.1 Puissances

Définition 4. a^b **le vicieux**

Soit a un nombre entier/réel et b un nombre entier/réel.

> Lorsque $b = n$ est un entier positif, alors $a^n \overset{def}{=} \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$

> Lorsque b est un entier/réel, alors $a^{-b} \overset{def}{=} \dfrac{1}{a^b}$

> Lorsque $n = {}^1/_2$, alors $a^{1/2} \overset{def}{=} \sqrt{a}$

> Lorsque $b = \text{bof}$, alors $a^b \overset{def}{=} e^{b\ln(a)}$

Complément autour de 0^b, de a^0 et de 0^0.

Lorsque $b \neq 0$, les définitions classiques donnent $0^b = 0$.

Lorsque $a \neq 0$, on convient que $a^0 = 1$ Remarque : Aucune des définitions classiques ne s'appliquent.

Pour calculer 0^0, on a un problème car Soit $0^0 = 0^b = 0$, Soit $0^0 = a^0 = 1$.

En algèbre, $0^0 \overset{def}{=} 1$ *en analyse,* 0^0 n'existe pas c'est une FI.

Théorème 5. Les 6 formules autour de a^b.

> *Kulture* $(-1)^{pair} = 1$ et $(-1)^{impair} = -1$

> *Le Formulaire : 18h, 19h, 20h, 21h, 7h, 7h45*

$$a^{b+c} = a^b\, a^c$$
$$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c} \quad et/ou \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$
$$(ab)^c = a^c\, b^c$$

$$a^{b^c} \overset{def}{=} a^{(b^c)} = Rien$$
$$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$$
$$a^0 = 1$$

En particulier : $z^{2^n} = z^{(2^n)} \neq \left(z^2\right)^n = z^{2n}$ et $a^{(b^c)} \neq \left(a^b\right)^c$

Lorsque plusieurs formules sont utilisables pour calculer a^b, on obtient toujours le même résultat.

Remarque : Ca n'est pas "évident"
mais $2^2 = a^2 = a \times a = 4$ *est bien égale à* $2^2 = a^2 = e^{2\ln(a)} = e^{2\ln(2)}$ *!!!*

Démonstration : *Un formulaire cela se démontre*

Comme une puissance entière est une succession de produit, le formulaire se démontre simplement en détaillant les produits

> $a^2.a^3 = (a.a).(a.a.a) = a.a.a.a.a = a^5 = a^{2+3}$

> $a^2.a^{-3} = a^2.\dfrac{1}{a^3} = (a.a).\dfrac{1.}{a.a.a} = \dfrac{1}{a} = a^{-1} = a^{2-3}$

> $(a.b)^3 = (a.b).(a.b).(a.b) = (a.a.a).(b.b.b) = a^3.b^3$

> $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = \left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{a^3}{b^3}$

$$\text{Et enfin } \left(a^n\right)^m = \underbrace{a^n.a^n...a^n}_{m\text{ fois}} = a^{n+n+...+n} = a^{n.m}$$

3.2 Exponentielle et logarithme.

Théorème 6. Autour de exp / ln

Les formules de exp

Soit $a, b \in \mathbb{R}$

$$e^{a+b} = e^a\, e^b$$
$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad et/ou \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$
$$e^{ab} = \left(e^a\right)^b$$
$$e^0 = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx}\left[e^x\right] = e^x$$

Les formules de ln

Soit $a, b > 0$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad et/ou \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$
$$\ln\left(\square^\alpha\right) = \alpha \ln\square$$
$$\ln(1) = 0 \quad et \quad \ln(e) = 1$$

$$\forall x > 0, \quad \frac{d}{dx}\left[\ln(x)\right] = \frac{1}{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x, \quad \forall x > 0,\ e^{\ln(x)} = x$$

4 Factoriel et Coefficient du binôme.

Définition 7. Factoriel d'un entier positif

On considère $n \in \mathbb{N}^*$

Le nombre "factoriel n", noté $n!$ est l'entier

$$n! = 1 \times 2 \times .... \times n = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$$

Convention : $0! = 1$.

Théorème. Dans $n!$, il y a plein de facteurs et on peut jouer avec

$$(n+1)! = (n+1)\, n!$$

$$n! = n\,(n-1)! = n\,(n-1)\,(n-2)!$$

Exemple. On a facilement

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 1.2 = 2, \quad 3! = 1.2.3 = 6, \quad 4! = 1.2.3.4 = 24, \quad 5! = 120$$

On a aussi

> 100! = 3628 800, 93 326 215 443 944 152 681 699 238 856 266 700 490 715 968 264 381 621 468 592 963 895 217 599 993 229 915 608 941
463 976 156 518 286 253 697 920 827 223 758 251 185 210 916 864 000 000 000 000 000 000 000 000

> 2017! = C'est un nombre de 5792 chiffres = 46912386 064.................361 376 390 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

Le nombre 2017! se termine par **exactement** 502 zéros.

Définition 8. Coefficient du binôme d'ordre n, k

Soit n, k deux entiers

> Lorsque $0 \leqslant k \leqslant n$, alors $\binom{n}{k} \overset{def}{=} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{haut!}{bas!\;(haut-bas)!}$

En particulier comme $0! = 0$, on a $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{0}{0} = 1$

> Lorsque $k > n$ ou $k < 0$, on convient que $\binom{n}{k} = 0$