Factoriser-Développer

Exercice 1. [Correction] Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

1. $(x-2)^2\left(-x^2+3x-1\right)-(2x-1)(x^3+2)$
2. $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$
3. $\left((x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)+1\right)x-x^6-x^5+2$
4. $(x+1)(x-1)^2-2\left(x^2+x+1\right)$
5. $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$
6. $\left(x^2+x+1\right)^2$

Exercice 2. [Correction] *Factoriser* et simplifier.

$$A=(x+1)(x+2)+(x-1)(2x-3) \qquad B=1-t-(t-1)(t-2)$$
$$C=(at+b)^2-(at+b)(ax-2) \qquad D=\left(x^2-1\right)-2(x+1)^2$$
$$E=\left(x^2+2x+1\right)-(2x-1)(x+1) \qquad F={}^1/_x+x+2\left(x^2+1\right)$$
$$G=t^{2n}-t^n \qquad H=(x+1)^{n+1}-(x+1)^n$$

Exercice 3. [Correction] Factoriser les expressions polynomialessuivantes.

1. $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$
2. $25-(10x+3)^2$
3. $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$
4. $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$

Fraction

Exercice 4. Simplifier, CàD écrire sous la forme $\frac{Haut}{Bas}$

$$A=\frac{1}{4}+\frac{1}{6} \qquad B=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} \qquad C=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4} \qquad D=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

Exercice 5. Déterminer Truc/Bidule/Machin/chouette puis finir le calcul

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(2n+2)}=\frac{Truc+Bidule+Machin}{chouette}$$
$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{Truc+Bidule+Machin}{chouette}$$

Exercice 6. *les nombres $a,b\in\mathbb{C}$ sont choisis afin que les dénominateurs ne s'annulent pas.* Simplifier, CàD écrire sous la forme $\frac{Haut}{Bas}$

$$A=\frac{1-\frac{a}{a+b}}{\frac{a+b}{a}-1} \qquad B=\frac{a+\frac{1}{b}}{b+\frac{1}{a}} \qquad C=\frac{\frac{a}{b}-2}{\frac{b}{a}-\frac{1}{2}} \qquad D=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+a}}}$$

Exercice 7. Les variables sont dans $\mathbb{R}$, les exposants dans $\mathbb{N}$ et les dénominateurs ne sont pas nuls.

Simplifier les expressions suivantes

$$A = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad B = \frac{x^2+x}{x+1}$$
$$C = \frac{x(x+1)-3(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \quad D = \frac{x-1}{(2x+3)(x+2)} + \frac{2x-2}{(x-2)(2x+3)}$$
$$E = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \quad F = \frac{\frac{1}{x}+1}{1-\frac{1}{x^2}} \quad G = \frac{e^{3x}}{e^x+e^{5x}}$$

Exercice 8. Le nombre $a \in \mathbb{C}$ est choisi afin que les dénominateurs ne s'annulent pas. Simplifier, CàD écrire sous la forme $\frac{Haut}{Bas}$

$$A = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} \quad B = \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^3}$$
$$C = \frac{1}{a(a+1)^2} - \frac{1}{a^2(a+1)} \quad D = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a}$$
$$E = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2a+2} \quad F = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a+1}$$

Exercice 9. Simplifier les expressions suivantes où x, y, z et t sont des réels non nuls dès qu'ils apparaissent au dénominateur.

$$A = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{x}} \quad B = \frac{xy+xz}{xt} \quad C = \frac{(xy)(xz)}{xt}$$
$$D = \frac{1+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{2x+\sqrt{1+x^2}} \quad E = \frac{1-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{2x-\sqrt{1+x^2}}$$

Puissance-exp-ln

Exercice 10. Simplifier les expressions suivantes

$$A = (2^3)^5 \quad A' = (2^5)^3 \quad B = 2^{(3^5)} \quad B' = 2^{(5^3)}$$
$$C = 2^3\,2^5 \quad C' = 2^3\,5^3 \quad D = (3^6)^5 - (9^5)^3$$

Exercice 11. Exprimer en fonction de $a = 2^n$

$$A = 2^{n+3} \quad B = 2^{2n+1} \quad C = 2^{-2n} \quad D = (-2)^{2n+3}$$
$$E = \frac{4^{n+1}}{2^{1-3n}} \quad F = 2^{n+3} - 2^{2n} \quad G = 8^{2n}$$

Exercice 12. Écrire sous forme d'une puissance de $10^{\square}$ les nombres

$$A = \frac{10^{-9}.10^4}{\left(10^{-3}\right)^2} \quad B = \frac{\left(10^{-3}\right)^{-2}.\left(10^4\right)^3}{\left(10^3\right)^2} \quad C = \frac{1000.100^2}{\left(10^{-2}\right)^{-3}} \quad D = \frac{\left(0,1.10^3\right)^2.100}{\left(100.10^{-3}\right)^3.1000}$$

Exercice 13. On considère a, b deux complexes et n, m dans $\mathbb{Z}$.
Simplifier les complexes suivants. Les nombres a et b sont choisis afin que les dénominateurs ne s'annulent pas

$$A = \frac{(a^n)^3 + \left(a^2\right)^n}{1+a^n} \quad B = \frac{a^{n+m}.(a.b^n)^m}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^n.(a.b^m)^n} \quad C = \left(a^2\right)^n.\frac{\left(1+\frac{1}{b}\right)^n}{(a+ab)^n}$$

Factoriel et Binôme

Exercice 14. Calculer

$$\binom{7}{2} =$$
$$\binom{n}{0} =$$
$$\binom{n}{1} =$$
$$\binom{n}{2} =$$
$$\binom{n}{n} =$$

Exercice 15. On considère $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n},$
2. On suppose que $k \in \{1, 2, .., n\}$.

   Calculer $\binom{n}{n-k}$ en fonction de $\binom{n}{k}$
3. On suppose que $k \in \{1, 2, .., n\}$.

   Calculer $\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$

Exercice 16. Calculer ou simplifier

$$\frac{7!}{5!} =$$
$$\frac{n!}{(n-2)!} =$$
$$(n+2)! - 2(n+1)! + n! =$$
$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} =$$

Exercice 17. [Correction] On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que $k \in \{1, 2, .., n\}$

Simplifier les expressions suivante

$$A = (n+1)! - (n-2)! \qquad B = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$
$$C = \frac{n!}{(k+1)!} - \frac{(n+1)!}{k!} \qquad D = (n-k)! - (n-k+1)!$$

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, 2, .., (n-1)\}$

Simplifier $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ et à la fin mettre le résultat sous la forme $\binom{\square}{\triangle}$

Plus difficile

Exercice 19. [Correction] Pour les suites suivantes, simplifier puis donner le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$a_n = \frac{11^n}{n!} \qquad b_n = \binom{2n}{n}$$

Exercice 20. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, on définit $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Démontrer, par récurrence, que : $\forall\, n \geqslant 2,\ u_n = \dfrac{n+1}{2n}$

Exercice 21. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = {}^1/_2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n}{1+u_n}$

Démontrer, par récurrence, que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$.

Exercice 22. On considère les suites

$$u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \Delta_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

Montrer que : $\Delta_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 23. Soit la suite (F_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_n = 2^{2^n} + 1$

Calculer $(F_n)^2$. En déduire F_{n+1} en fonction de F_n.

Exercice 24. Pour les fonctions suivantes simplifier $h(x+1) - h(x)$

$$f(x) = x^2 + x + 1 \qquad g(x) = x(x+1)(2x+1) \qquad H_n(x) = \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n!}$$

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. $(x-2)^2\left(-x^2+3x-1\right)-(2x-1)(x^3+2)=-2+12x-17x^2+8x^3-3x^4$
2. $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)=-28+21x$
3. $\left((x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)+1\right)x-x^6-x^5+2=2+x^3-x^4-x^5$
4. $(x+1)(x-1)^2-2\left(x^2+x+1\right)=-1-3x-3x^2+x^3$
5. $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)=1+x^4$
6. $\left(x^2+x+1\right)^2=1+2x+3x^2+2x^3+x^4$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

$A=$ *Rien à factoroser, on développe* $\qquad B=$ *On factorise* $(t-1)$

$C=$ *On factorise* $(at+b)$ $\qquad C'=$ *On factorise* $(at+b)$

$D=$ *On factorise* $(x+1)$ $\qquad D'=$ *On factorise* $(x+2)$

$E=$ *On factorise* $(x+1)$ $\qquad F=$ *On simplifie les fractions puis on factorise* (x^2+1)

$G=$ *On factorise* t^n $\qquad H=$ *On factorise* $(x+1)^n$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors
$$-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49=-(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2=(6x+7)\left[-(6x-1)+6x-7\right]=-6(6x+7).$$
2. On a $25-(10x+3)^2=5^2-(10x+3)^2=(10x+8)(-10x+2)=4(5x+4)(-5x+1)$.
3. On a $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64=2(3x-4)(10x+3)$
4. On a $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64=-8(x+1)(x+16)$

Solution de l'exercice 17 (Énoncé)

$A=$ *On factorise* $(n-2)!$ $\qquad B=$ *On factorise* $\dfrac{1}{n!}$

$C=$ *On factorise* $\dfrac{n!}{k!}$ $\qquad D=$ *On factorise* $(n-k)!$

Solution de l'exercice 19 (Énoncé)

> On a
$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}-a_n=\frac{11^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{11^n}{n!}=\frac{11^n}{n!}\left[\frac{11}{n+1}-1\right]=\frac{11^n}{n!}\left[\frac{11-n}{n+1}\right]$$
Donc $a_{n+1}-a_n<0$ à partir du rang $N_0=11$

> On a
$$\begin{aligned}\forall\, n\in\mathbb{N},\ b_{n+1}-b_n=\binom{2n+2}{n+1}-\binom{2n}{n}&=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}-\frac{(2n)!}{n!n!}\\&=\frac{(2n)!}{n!n!}\left[\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}-1\right]\\&=\frac{(2n)!}{n!n!}\left[\frac{2(2n+1)}{(n+1)}-1\right]\\&=\frac{(2n)!}{n!n!}\left[\frac{4n+2-(n+1)}{(n+1)}\right]\\&=\frac{(2n)!}{n!n!}\frac{3n+1}{(n+1)}\geqslant 0\end{aligned}$$
Donc pour tout n, $b_{n+1}-b_n\geqslant 0$.