TD 1 manipulation des objets.

Jeudi 05 Septembre 2024.

Manipulation

Exercice 1. Exprimer en fonction de $a = 2^n$

$$A = 2^{n+3} \qquad B = 2^{2n+1} \qquad C = 2^{-2n} \qquad D = (-2)^{2n+3}$$

$$E = \frac{4^{n+1}}{2^{1-3n}} \qquad F = 2^{n+3} - 2^{2n} \qquad G = 8^{2n}$$

Exercice 2. Pour les fonctions suivantes simplifier $h(x+1) - h(x)$

$$h(x) = x^3 \quad \text{et} \quad h(x) = x(x-1)(2x-1)$$

Exercice 3. [Correction] Simplifier

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} \qquad \frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} \qquad \frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} \qquad \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$$

Exercice 4.

1. Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ bien choisis, montrer que : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
2. Déterminer le signe de $\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}$

Exercice 5. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exercice 6. [Correction] Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ f(a+b) = \dfrac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$

Exercice 7. [Correction] Montrer que les fonction suivantes sont impaires, CàD que $\forall\, x \in \mathscr{D},\ f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2021 + x}{2021 - x}\right) \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 3^n$

Pair-Impair

Exercice 9. [Correction] On sait que : $1+2+3+\cdots+\square=\dfrac{\square(\square+1)}{2}$

On considère $P_n=2+4+\cdots+(2n)$ et $I_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)$

Calculer P_n puis P_n+I_n et enfin I_n.

Exercice 10. [Correction] Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère

$P_n=$ Le produit des entiers pairs de 2 à $2n=2.4.6....(2n-2)(2n)$

ET

$I_n=$ Le produit des entiers impairs de 1 à $(2n+1)=1.3.5....(2n+1)$

Calculer (à l'aide, entre autre, de factoriel) P_n puis $P_n\times I_n$ et enfin I_n.

Manipulation plus difficile

Exercice 11. [Correction] On considère la suite (a_n) définie par

$$a_0=2 \quad et \quad \forall\, n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=\frac{(a_n)^2}{2a_n-1}$$

Démontrer, par récurrence, que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ a_n=\dfrac{2^{2^n}}{2^{2^n}-1}$

Exercice 12. On considère la suite $u_n=\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}$

Simplifier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ puis vérifier que : $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)=1-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 13. Pour les fonctions suivantes simplifier $h(x+1)-h(x)$

$$f_n(x)=\frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n!} \qquad g_n(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

Exercice 14. [Correction] Soit la suite (F_n) définie par : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ F_n=2^{2^n}+1$

Montrer par récurrence que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ F_n=F_0.F_1\cdots F_{n-1}+2$.

Correction.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

> $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=(2n)(2n+1)$

> $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}}-\dfrac{n!}{2^{2n}}=\dfrac{n!}{2^{2n}}\left[\dfrac{n+1}{2^2}-1\right]=\dfrac{n!}{2^{2n}}\left[\dfrac{n-3}{2^2}\right]$

> $\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{2n\times(n+1)!}+\dfrac{1}{2\times(n+2)!}=\dfrac{1}{n!}\left[1+\dfrac{1}{2n(n+1)}+\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}\right]=\dfrac{1}{n!}\left[\dfrac{2n(n+1)(n+2)+(n+2)+n}{2n(n+1)(n+2)}\right]$

> $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}=\dfrac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\,\dfrac{(k+1)!(n-k-1)!}{n!}=\dfrac{k+1}{n-k}$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On a

$$\begin{aligned}
\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)} &= \frac{\dfrac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}}+\dfrac{e^b-e^{-b}}{e^b+e^{-b}}}{1+\dfrac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}}\dfrac{e^b-e^{-b}}{e^b+e^{-b}}}\\
&= \frac{\dfrac{\left(e^a-e^{-a}\right)\left(e^b+e^{-b}\right)+\left(e^a+e^{-a}\right)\left(e^b-e^{-b}\right)}{\left(e^a+e^{-a}\right)\left(e^b+e^{-b}\right)}}{\dfrac{\left(e^a+e^{-a}\right)\left(e^b+e^{-b}\right)-\left(e^a-e^{-a}\right)\left(e^b-e^{-b}\right)}{\left(e^a+e^{-a}\right)\left(e^b+e^{-b}\right)}}\\
&= \frac{\left(e^a-e^{-a}\right)\left(e^b+e^{-b}\right)+\left(e^a+e^{-a}\right)\left(e^b-e^{-b}\right)}{\left(e^a+e^{-a}\right)\left(e^b+e^{-b}\right)}\times\frac{\left(e^a+e^{-a}\right)\left(e^b+e^{-b}\right)}{\left(e^a+e^{-a}\right)\left(e^b+e^{-b}\right)-\left(e^a-e^{-a}\right)\left(e^b-e^{-b}\right)}\\
&= \frac{2e^{a+b}-2e^{-a-b}}{2e^{a+b}-2e^{-a-b}}=f(a+b)
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé) On a

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \ln\left(\frac{2021-x}{2021+x}\right)\\
&\boxed{\begin{array}{l}\text{Or on a la formule } \ln\left(\dfrac{1}{\square}\right)=\ln(\square)=-\ln\left(\dfrac{\square}{1}\right)\\ \qquad\text{CàD } \ln\left(\dfrac{Haut}{Bas}\right)=-\ln\left(\dfrac{Bas}{Haut}\right)\end{array}}\\
&= -\ln\left(\frac{2021+x}{2021-x}\right)=-f(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}\\
&= dfrac\frac{1}{e^{2x}}-1\frac{1}{e^{2x}}+1\\
&= \cdots=\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}=-f(x)
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

> $P_n=2+4+\cdots+(2n)=2\left[1+2+3+\cdots+n\right]=2\dfrac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$

> $P_n+I_n=1+2+3+\cdots+(2n+1)=\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{2}=(2n+1)(n+1)$

> $I_n=P_n+I_n-P_n=(2n+1)(n+1)-n(n+1)=(n+1)\left[(2n+1)-n\right]=(n+1)^2.$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

1. On a

$$\begin{aligned}
P_n &= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n) \\
&= \underbrace{(2.1)}\ \underbrace{(2.2)} \cdots \underbrace{(2(n-1))}\ \underbrace{(2n)} \\
&= \underbrace{2.2...2}_{n\ fois}\ 1.2.3....n \\
&= 2^n\, n!
\end{aligned}$$

2. On a $I_n = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)$, ainsi

$$\begin{aligned}
I_n \times P_n &= (1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)) . (2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n)) \\
&= 1.2.3....(2n-1)(2n)(2n+1) \\
&= \textit{\textbf{Le produit de tous les entiers de 1 à (2n+1)}} \\
&= (2n+1)!
\end{aligned}$$

3. On a $I_n \times P_n = (2n+1)!$

$$\text{Conclusion : } I_n = \frac{(2n+1)!}{P_n} = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}$$

Solution de l'exercice 11 (Énoncé)

$$\text{On utilisera } \left[2^{2^n}\right]^2 = 2^{2^n \times 2} = 2^{2^{n+1}}$$

On fait par récurrence $H_{<n>}\ :\ a_n = \dfrac{2^{2^n}}{2^{2^n}-1}$

Initialisation. On a $a_0 = 2$ et $\dfrac{2^{2^0}}{2^{2^0}-1} = \dfrac{2^1}{2^1-1} = \dfrac{2}{2-1} = 2$. Donc $H_{<0>}$ est vraie.

Hérédité. On suppose que H_n est vraie

$$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}, \text{ CàD } a_{n+1} = \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^{n+1}}-1}}$$

On chemine

$$\begin{aligned}
a_{n+1} = \frac{(a_n)^2}{2a_n - 1} &= \frac{\left(\frac{2^{2^n}}{2^{2^n}-1}\right)^2}{2\frac{2^{2^n}}{2^{2^n}-1} - 1} \\
&= \frac{\frac{\left(2^{2^n}\right)^2}{\left(2^{2^n}-1\right)^2}}{\frac{2.2^{2^n}-\left(2^{2^n}-1\right)}{2^{2^n}-1}} \\
&\qquad \textit{Or } \left(2^{2^n}\right)^2 = 2^{2^n.2} = 2^{2^{n+1}} \\
&\qquad \textit{et } 2.2^{2^n} - \left(2^{2^n}-1\right) = 2^{2^n}+1 \\
&= \frac{2^{2^{n+1}}}{\left(2^{2^n}-1\right)^2} . \frac{2^{2^n}-1}{2^{2^n}+1} \\
&= \frac{2^{2^{n+1}}}{\left(2^{2^n}-1\right)\left(2^{2^n}+1\right)} \\
&= \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^{n+1}}-1} \qquad \text{Yes, fini}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 14 (Énoncé)

$$\text{On utilisera } \left[2^{2^n}\right]^2 = 2^{2^n \times 2} = 2^{2^{n+1}}$$

On fait par récurrence $H_{<n>}$: $F_n = F_0.F_1 \cdots F_{n-1} + 2$

Initialisation (n=1). On a

$G = F_1 = \cdots$ et $D = F_0 + 2 = \cdots$

Donc $H_{<1>}$ est vraie.

Hérédité. On suppose que H_n est vraie

$$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}\text{, CàD } F_{n+1} = F_0.F_1 \cdots F_n + 2}$$

On chemine de Gauche à droite

$$\begin{aligned}
F_0.F_1 \cdots F_n + 2 &= F_0.F_1 \cdots F_{n-1} F_n + 2 \\
&\quad \textit{On applique } H_{<n>} \\
&\quad\quad \textit{CàD } F_0.F_1 \cdots F_{n-1} = F_n - 2 \\
&= (F_n - 2)\, F_n + 2 \\
&= \left(2^{2^n} - 1\right)\left(2^{2^n} + 1\right) + 2 \\
&= \left(2^{2^n}\right)^2 - 1 + 2 \\
&= 2^{2^n.2} + 1 \\
&= 2^{2^{n+1}} + 1 = F_{n+1} \quad Fini
\end{aligned}$$