Les inégalités.

L'objectif est de démontrer $A \leqslant B$ ou $A = B$

1 Premier temps de la valse

1.1 Convexité

Théorème 1. inégalité de convexité

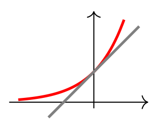
Soit f une fonction définie, continue dérivable de $\mathscr{D} = [a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

On suppose que $f'' \geqslant 0$ sur $\mathscr{D}$ alors f est convexe,

$$\text{CàD } \forall x \in \mathscr{D}, \quad \underbrace{Tangente} \leqslant f(x) \leqslant \underbrace{Corde}$$

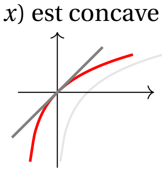
Applications.

> La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ ainsi



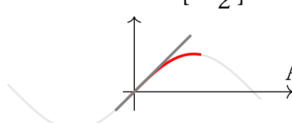
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{1 + x}_{Tangente} \leqslant e^x$

> La fonction $\ln(1 + x)$ est concave sur $]-1, +\infty[$ ainsi



Ainsi $\forall x \in]-1, +\infty[, \ \ln(1 + x) \leqslant \underbrace{x}_{Tangente}$

> La fonction $Sinus$ est concave sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ainsi



Ainsi $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \ \underbrace{\dfrac{2}{\pi}.x}_{Corde} \leqslant \sin(x) \leqslant \underbrace{x}_{Tangente}$

1.2 Viking.

Théorème 2. Viking

> Comme en terminale

> Pour majorer $A - B$, on majore A et on minore B.

$$\left.\begin{array}{r} m_A \leqslant A \leqslant M_A \\ \\ m_B \leqslant B \leqslant M_B \end{array}\right\} \implies A - B \leqslant M_A - m_B$$

> Pour majorer A/B , on majore A et on minore B.

$$\left.\begin{array}{r} m_A \leqslant A \leqslant M_A \\ \\ 0 < m_B \leqslant B \leqslant M_B \end{array}\right\} \implies \frac{A}{B} \leqslant \frac{M_A}{m_B}$$

> Kulture de base

On sait que : $\forall \ \square \in \mathbb{R}, \ -1 \leqslant \sin\square \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos\square \leqslant 1$

1.3 Transfert avec une fonction (dé)croissante

On utilise

$$\left.\begin{array}{r}\forall\, x \in [a,b] \\ f \textit{ est croissante sur } [a,b]\end{array}\right\} \Longrightarrow f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$$

1.4 Gros-Petit

Il y a 2 possibilité

> Gros-Petit = FFB   puis on fait un bô tableau de signe

> On étudie la fonction $h : x \longmapsto$ Gros -petit

1.5 Récurrences.

2 Deuxième temps de la valse

Théorème 3. On chemine

On chemine de Gauche vers droite, on chemine de compliquer vers simple

Lorsqu'on démontre une inégalité par récurrence, on chemine ....

Lorsqu'on démontre doit utiliser plusieurs inégalités, on chemine ....

3 Valeurs Absolues, mon amie.

3.1 Définition et Propriétés.

Définition 4. Définition de $|x|$.

Soit x un réel.
Il existe plusieurs façons *équivalentes* de définir/calculer le nombre $|x|$.

> Simplification.

On a $|x| = \begin{cases} = +x & \textit{Lorsque } x \geqslant 0 \\ = -x & \textit{Lorsque } x \leqslant 0 \end{cases}$ *

> Majoration/Encadrement.

$|x|$, c'est le plus grand entre $+x$ et $-x$.
Ainsi on a : $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

> Distance.

$|x| = |x - 0|$, c'est la distance de x à 0.

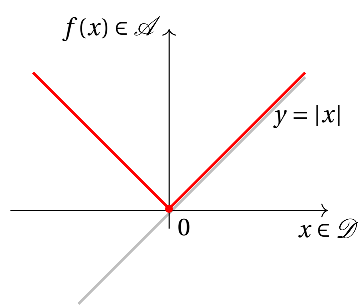
Graphe.

La fonction Valeur Absolue $x \longmapsto |x|$

> est définie et continue sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

> est dérivable sur $\mathscr{D}' = \mathbb{R}^*$.

La fonction Valeur Absolue n'est pas dérivable en 0.



Théorème 5. Formulaire.
Soit x, x', a des réels.

Kulture.
Les valeurs absolues se simplifient sauf si ....

> **Positivité** $|x|$ est un réel $\geqslant 0$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

> **Calcul**

$$|-x| = |x| \text{ et } \left|x.x'\right| = |x|\left|x'\right| \text{ et Si } x' \neq 0, \left|\frac{x}{x'}\right| = \frac{|x|}{|x'|}$$

Attention au piège. $\sqrt{x^2} = |x| \neq x$

> **Symétrie** $|a - x| = |x - a|$.

> **L'inégalité triangulaire**

$$\left|2x + 3x'\right| \leqslant 2|x| + 3\left|x'\right| \quad \textit{et} \quad \left|2x - 3x'\right| \leqslant 2|x| + \left|3x'\right|$$

3.2 Fonctions lipschitziennes.

Définition 6.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est k-lipschitzienne Ssi $\forall\ x, x' \in I,\ \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant k|x - x'|$

Théorème 7.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } I \\ \forall\ t \in I, \quad |f'(t)| \leqslant k \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{La fonction } f \text{ est } k\text{-lipschitzienne} \\ \qquad \text{CàD } \forall\ x, x' \in I,\ \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant k|x - x'| \end{array}$$

4 Exercices

Le premier temps de la valse

Exercice 1. Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0,1]$,

$$\frac{n-1}{n+3} \leqslant \frac{\sin(x)+n}{n+x+x^2+x^3} \leqslant \frac{n+1}{n}$$

Exercice 2.

1. Montrer que : $\forall x \in [1,3],\ 1 \leqslant \frac{3x+1}{x+1} \leqslant 5$.
2. Montrer plus précisément que : $\forall x \in [1,3],\ 2 \leqslant \frac{3x+1}{x+1} \leqslant \frac{5}{2}$

Exercice 3.

1. Encadrer *rapidement* puis plus finement sur $[-1,1]$ l'expression x^2-x+1.
2. Encadrer *rapidement* puis plus finement sur $[-1,1]$ l'expression $\frac{x+2}{x^2+1}$.

Exercice 4. Majorer $h(t)$ sur $[0,1]$

(1) $h(t) = e^{-2t}$

(2) $h(t) = \frac{\sqrt{2-t}}{3-t}$

(3) $h(t) = t\ln(1+t)$

(4) $h(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+t}$

(5) $h(t) = \sin(t^2)$

(6) $h(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$

Exercice 5. Montrer que

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1}+u_n$
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 3^n$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n+u_{n-1}+\ldots+u_1+u_0$
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2^n$

Exercice 6. Proposer un encadrement pour les quantités suivantes

> $\frac{x^2-x+1}{x^2-\sqrt{2-x}+3}$ pour $x \in [-1,1]$

> $\frac{x-y^2+3}{x^2+y^2-y}$ pour $x, y \in [1,2]$ puis pour $x, y \in [-2,-1]$

Exercice 7. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Exercice 8. [Correction] Montrer que :

$$\forall\ x \in [0,1],\ 0 \leqslant x(1-x) \leqslant {}^1/_4$$

Exercice 9. [Correction] Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{1+x} \leqslant 1+\frac{1}{2}x$$

Exercice 10. Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\quad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$

Exercice 11. [Correction] Montrer que :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \frac{\sqrt{x}}{1+x} \leqslant \frac{1}{2}$$

Exercice 12. [Correction] Montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad ab \leqslant b\ln b + e^{a-1}$$

Exercice 13. Soit a, b deux réels positifs. Montrer que

$$\frac{2}{{}^1/_a + {}^1/_b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Exercice 14. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (n+1)(u_{n+1}+u_n)$$

Monter que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n!$

Exercice 15. [Correction] Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \geqslant 0 \quad (1+x)^n \geqslant 1+nx$$

Exercice 16. [Correction]

1. Montrer que $\forall x \in [0,1],\ (1-x)^n \geqslant 1-nx$
2. Montrer que $\forall x \in [0,1],\ (1-x)^n \leqslant \frac{1}{1+nx}$

Exercice 17. [Correction] Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{1^2} + + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

Exercice 18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \geqslant \frac{3n}{2n+1}$$

Exercice 19. [Correction] Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall\ t \geqslant 1, \quad t^n - 1 \leqslant nt^{n-1}(t-1).$$

On cheminera du petit vers le gros et on notera que 1 est une racine évidente.

Le deuxième temps de la valse

Exercice 20. Une jolie inégalité.

1. Monter que :$\forall x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x$
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant 3$

Exercice 21.

1. Monter que :$\forall x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x$
2. En déduire que : $\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x}$

Exercice 22. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = {}^1/_2$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2\,u_n}{1+u_n^2}$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. *Bonus* Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ à préciser.

Exercice 23. Soit la suite (x_n) définie

$$\text{par } x_0 = 4 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{2\,(x_n)^2 - 3}{x_n + 2}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - 3 \geqslant \dfrac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite (x_n) est-elle convergente ?

Exercice 24. [Correction]

1. Montrer que : $\forall x, y \geqslant 0,\ \dfrac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$
2. En déduire que : $\forall a, b, b \geqslant 0,\ a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$

Exercice 25. [Correction] Soit $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. On note $s = x+y+z$

1. Un première minoration Montrer que : $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

   En déduire que : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \geqslant 6 - s$
2. Un deuxième minoration
   (a) Montrer que : $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.
   En déduire que : $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz$
   (b) Développer $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$.
   En déduire que : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \geqslant \dfrac{9}{s}$
3. Laquelle des deux minorations est-elle la meilleur ?

Bonus

Exercice 26. Soient a, b des réels tels que $a+b$ et ab soient entiers.

Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a^n + b^n$ est un entier.

Remarque : Les nombres a et b ne sont pas forcément entier. Par exemple Si $a = 1+\sqrt{2}$ et $b = conjugé = 1-\sqrt{2}$.

Exercice 27. Montrer par récurrence que $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ est un polynôme en $\square = x + \dfrac{1}{x}$

Valeur Absolue

Exercice 28. [Correction] Simplifier les valeurs absolues suivantes

$$\left|\ln\left(\frac{7}{11}\right)\right|, \quad \left|e^{1/3} - e^{-1/3}\right|, \quad \left|\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right|$$

Exercice 29. [Correction] On considère la fonction $f : x \longmapsto \ln(x^2 - 3x + 2)$.

Déterminer $\mathscr{D}_f$ et simplifier $|f'(t)|$ sur $\mathscr{D}_f$.

Exercice 30. [Correction] Simplifier $\sqrt{1+\cos(2x)}$ pour $x \in [0, 2\pi]$

Exercice 31. [Correction]

1. Montrer que $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R},\ |x+y+z| \leqslant |x| + |y| + |z|$.
2. Montrer que $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x-y|$.

Exercice 32. Donner le graphe des fonctions

$$f : x \longmapsto |x-2| + 2|x+3| \text{ et } g : x \longmapsto \Big|x - 2 + 2|x+3|\Big|$$

Fonction Lipschitzienne

Exercice 33. [Correction] Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|$

Exercice 34. Pour les expression suivante : Calculer, simplifier et encadrer $\left|h'(t)\right|$ sur $[0,1]$. En déduire que h est lipschitzienne.

> $h(t) = e^{-2t}$.

> $h(t) = \sqrt{2-t}$.

> $h(t) = t\ln(1+t)$.

> $h(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$.

> $h(t) = \sin(t^2)$.

> $h(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$.

Exercice 35. On considère la fonction f définie par : $\forall\, x \neq 0,\ f(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{2}{t}\right)$

Montrer que la fonction f est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$

Exercice 36. On considère la fonction f de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f_n(x) = e^{-x}(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!})$$

1. Sur $[0,1]$; calculer et simplifier $\left|f'(t)\right|$

   En déduire que, sur $[0,1]$, la fonction f_n est $\dfrac{1}{n!}$-lipschitzienne.
2. En déduire que une majoration de $\left|f_n(1) - f_n(0)\right|$

$$\text{En conclure que : } \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e$$

Correction.

Solution de l'exercice 8 (Énoncé) On fait Rapide/Lent comme Terminale : $\forall x \in [0,1]$, on a $x(1-x) \geqslant 0(1-1) = 0$.
Direct pour l'autre

$$\begin{aligned} G-p = \frac{1}{4} - x(1-x) = &= \frac{4x^2-4x+1+}{4} \\ &= \frac{Trinome}{4} \\ &\quad \textit{comme } \Delta = 0, \textit{ le trinôme est un carré} \\ &= \frac{(2x-1)^2}{4} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé) On y va direct

$$\forall x > 0, \quad 1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x} = \frac{(...)^2 - (...)^2}{1 + \frac{1}{2}x + \sqrt{1+x}} = \frac{1/_4\ x^2}{.... > 0} \geqslant 0$$

Solution de l'exercice 11 (Énoncé) Direct

Solution de l'exercice 12 (Énoncé)
On fixe une des 2 variables puis on fait une étude de fonction.

Solution de l'exercice 16 (Énoncé)

On va montrer par récurrence $H_{<n>}$: $(1-a)^n \leqslant \dfrac{1}{1+na}$

> Initialisation.

On a $(1-a)^0 = 1$ et $\dfrac{1}{1+0a} = 1$ donc $H_{<0>}$ est vraie

> Hérédité.

On suppose $H_{<n>}$

$$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}, \text{ CàD} \quad (1-a)^{n+1} \leqslant \frac{1}{1+(n+1)a}}$$

On y va brutal :

$$\forall a > 0, \quad (1-a)^{n+1} = (1-a)^n(1-a) \leqslant \frac{1}{1+na}(1-a) = Intermédiare$$

De plus

$$\begin{aligned} Final - Inter = \frac{1}{1+(n+1)a} - \frac{1-a}{1+na} &= \frac{(1+na)-(1-a)(1+(n+1)a)}{.... >} \\ &= \frac{(n+1)a^2}{.... >} > 0 \qquad Fini. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 17 (Énoncé) On fait par récurrence (simple)

$$H_{<n>} : 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

Initialisation.

On a bien $1 \leqslant 2 - \dfrac{1}{1}$;, donc $H_{<1>}$ est vraie.

Hérédité.

On suppose que $H_{<n>}$ est vraie,

$$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}, \text{ CàD} \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}}$$

On y va brutalement .

$$\begin{aligned} Gauche &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\quad \text{On applique brutalement } H_{<n>} \\ &\leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} = \text{Intermédiaire} \end{aligned}$$

On va montrer directement que : $Intermédiaire \leqslant Final$

$$\begin{aligned} Final - Intermédiaire &= 2 - \frac{1}{n+1} - \left(2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{(n^2+n+1) - n(n+1)}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $H_{<n+1>}$ est vraie.

Solution de l'exercice 19 (Énoncé)

Pour tout $t \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} t^n - 1 = a^n - b^n &= (a-b)[a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}] \\ &= (t-1)[t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + t + 1] \\ &\quad \textit{Or } t \geqslant 1 \textit{ donc } 1 \leqslant t \leqslant \cdots \leqslant t^{n-2} \leqslant t^{n-1} \\ &\leqslant (t-1)[t^{n-1} + t^{n-1} + \cdots + t^{n-1} + t^{n-1}] \\ &\leqslant (t-1)nt^{n-1} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 24 (Énoncé)

1. Direct.
2. J'applique l'inégalité avec a, b avec b, c et avec c, a ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \frac{a^2+b^2}{2} &\geqslant ab \\ \frac{b^2+c^2}{2} &\geqslant bc \\ \frac{c^2+a^2}{2} &\geqslant ca \end{aligned}$$

   Puis on somme ces trois inégalités.

Solution de l'exercice 25 (Énoncé)

1. La première inégalité se fait "facilement" avec une méthode directe.
   Puis on applique cette inégalité avec x, y et z et on somme.
2. (a) La première inégalité se fait "facilement" avec une méthode directe.
   Puis on applique cette inégalité avec x, y, y, z et z, x et on fait le produit.

   (b) On a

$$\begin{aligned} (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) &= 3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} \\ &\quad \text{Or } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \square + \frac{1}{\square} \geqslant 2 \\ &\geqslant 3 + 2 + 2 + 2 = 9 \end{aligned}$$

   (c) On doit comparer $6 - s$ et $\frac{9}{s}$. On le fait direct

$$6 - s - \frac{9}{s} = \frac{-s^2 + 6s - 9}{s} = \ominus \frac{(s-3)^2}{s} \leqslant 0$$

   Ainsi on a toujours $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant \frac{9}{s} \geqslant 6 - s$ ainsi l'inégalité de la question 2 est meilleur.

Solution de l'exercice 28 (Énoncé) On a

Comme $0 \leqslant \frac{7}{11} < 1$, on a $\left|\ln\left(\frac{7}{11}\right)\right| = -\ln\left(\frac{7}{11}\right)$

Comme la fonction exp est croissante, on a $\left|e^{1/3} - e^{-1/3}\right| = e^{1/3} - e^{-1/3}$

Sachant que $\pi \leqslant \frac{8\pi}{7} \leqslant 2\pi$ et avec un bô dessin, on a $\left|\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right| = -\sin(\frac{8\pi}{7}) = \sin(\frac{\pi}{7})$

Solution de l'exercice 29 (Énoncé)

On sait que : $x \in \mathscr{D}_f$ Ssi on peut calculer $f(x)$. Ainsi $\times \in \mathscr{D}_f$ Ssi $x^2 - 3x + 2 > 0$ On factorise le trinôme avec Δ et on trouve $x^2 - 3x + 2 = 1(x-1)(x-2)$.

Avec un bô tableau de signe, on obtient $\mathscr{D}_f =]-\infty, 1[\cup]2, \infty[$.

De plus $\forall x \in \mathscr{D},\ f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$, ainsi

> Si $x \in]-\infty, 1[,\ |f'(x)| = \frac{|3-2x|}{|1-x|\,|2-x|} = \frac{3-2x}{(1-x)(2-x)}$

> Si $x \in]2, \infty[,\ |f'(x)| = \frac{|3-2x|}{|1-x|\,|2-x|} = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$

Solution de l'exercice 30 (Énoncé)

Soit $x \in [0, 2\pi]$.

J'applique la formule avec $a = b = x$, ainsi $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$.

On a donc $\sqrt{1+\cos(2x)} = \sqrt{2\cos^2(x)} = \sqrt{2}\,|\cos(x)|$

> Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, on a $\sqrt{1+\cos(2x)} = +\sqrt{2}\cos(x)$

> Si $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, on a $\sqrt{1+\cos(2x)} = -\sqrt{2}\cos(x)$

Solution de l'exercice 31 (Énoncé)

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, on a
$$|x+y+z| = |x+\square| \leqslant |x| + |\square| \leqslant |x| + |y| + |z|$$
2. On fait deux situations selon que : $|x| \geqslant |y|$ ou $|x| \leqslant |y|$

<u>> Situation $|x| \geqslant |y|$</u>

$$\boxed{\text{On doit démontrer que : } \big||x|-|y|\big| = |x|-|y| \leqslant |x-y| \iff |x| \leqslant |x-y| + |y|.}$$

On a : $|x| = |x-y+y| = |\square + y| \leqslant |\square| + |y| = |x-y| + |y|$

<u>> Situation $|x| \leqslant |y|$</u>

On fait de même

Solution de l'exercice 33 (Énoncé)

On montre que la fonction Sinus est 1-lipschitzienne et on applique l'inégalité avec 1 et x.