DM 1 : Un peu de calcul.

Exercice 1. [Correction]

1. On suppose que $x = \dfrac{2^a}{1+2^a}$. On considère $y = \dfrac{2x}{1+x}$.
   Calculer (et simplifier) y.

2. On suppose que $x = \dfrac{2^{2^a}}{1+2^{2^a}}$. On considère $y = \dfrac{x^2}{2x-1}$.
   Calculer (et simplifier) y.

Exercice 2. [Correction] On considère la suite (I_n) vérifiant $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ *et* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \dfrac{2n-1}{2n} I_{n-1}$

Montrer (par récurrence) que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 3. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les nombres C_n défini par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$

1. Calculer C_0, C_1, C_2, C_3.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe $C_{n+1} - C_n$
   La monotonie de la suite (C_n) est-elle monotone ?
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, démontrer que : $C_n = \dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n+1}$
   En déduire que C_n est un entier.
4. Sans calcul supplémentaire, déduire des questions 2 et 3 que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ C_{n+1} \geqslant C_n + 1$
5. En utilisant l'inégalité précédente, montrer que $C_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. On a

$$y = \frac{2x}{1+x} = \frac{2\dfrac{2^a}{1+2^a}}{1+\dfrac{2^a}{1+2^a}} = \frac{\dfrac{2.2^a}{1+2^a}}{\dfrac{(1+2^a)+2^a}{1+2^a}} = \frac{2^{a+1}}{1+2^a}\frac{1+2^a}{1+2.2^a} = \frac{2^{a+1}}{1+2^{a+1}}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
y = \frac{x^2}{2x-1} = \frac{\left(\dfrac{2^{2^a}}{1+2^{2^a}}\right)^2}{2\dfrac{2^{2^a}}{1+2^{2^a}}-1} &= \frac{\dfrac{\left(2^{2^a}\right)^2}{(1+2^{2^a})^2}}{\dfrac{2\times 2^{2^a}-\left(1+2^{2^a}\right)}{1+2^{2^a}}} \\
&= \frac{\left(2^{2^a}\right)^2}{(1+2^{2^a})^2} \times \frac{1+2^{2^a}}{2^{2^a}-1} \\
&= \frac{\left(2^{2^a}\right)^2}{(2^{2^a}+1)(2^{2^a}-1)} \\
&= \frac{\left(2^{2^a}\right)^2}{(2^{2^a})^2-1^2} \\
&\textit{Or on a } \left(2^{2^a}\right)^2 = 2^{2^a\times 2} = 2^{2^{a+1}} \\
&= \frac{2^{2^{a+1}}}{2^{2^{a+1}}-1}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) On va montrer par récurrence $H_{<n>} \ : \ I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$

> Initialisation.

On a $\dfrac{(2\times 0)!}{2^0(0!)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ donc $H_{<0>}$ est vraie

> Hérédité.

On suppose $H_{<n>}$

$$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}\text{, CàD } I_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}}$$

On y va brutal

$$\begin{aligned}
I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}I_n &= \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+2)}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2.2(n+1)(n+1)2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2(n+1))!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \textit{Fini.}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 **(Énoncé)**

1. Calculer C_0, C_1, C_2, C_3.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
C_{n+1} - C_n &= \frac{1}{n+2}\binom{2(n+1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \\
&= \frac{1}{n+2}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} - \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!\,n!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{1}{n+2}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)\,(n+1)} - \frac{1}{n+1}\right] \\
&= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{1}{n+2}\frac{2(2n+1)}{(n+1)} - \frac{1}{n+1}\right] \\
&= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{(4n+2)-(n+2)}{(n+2)(n+1)}\right] \\
&= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{3n}{(n+2)(n+1)}\right] > 0
\end{aligned}$$

   Conclusion : la suite (C_n) est strictement croissante.
3. On chemine du compliquer vers le plus simple.

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \text{On écrit la définition.} \\
&= \text{On réduit au même dénominateur.} \\
&= \text{On factorise et on simplifie.} \\
&= \text{On obtient } \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n
\end{aligned}$$

   Comme $\binom{2n}{n}$ et $\binom{2n}{n+1}$ sont des coefficients du binôme donc ce sont des entiers

   Conclusion : le nombre C_n est un entier.
4. Comme C_{n+1} est **strictement** plus grand que C_n et que ce sont des entiers,

   on a bien $C_{n+1} \geqslant C_n + 1$
5. On a maintenant

$$\begin{aligned}
C_n &\geqslant C_{n-1} + 1 \\
&\geqslant C_{n-2} + 2 \\
&\geqslant C_{n-3} + 3 \\
&\vdots \\
&\geqslant \underbrace{C_0 + n}_{=a_n}.
\end{aligned}$$

   Comme $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, on a donc $C_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.