Racine(s) et imaginaire.

1 Racine carrée (d'un réel)

On sait que l'équation $X^2 = a$ admet selon des situations 2, 1 ou 0 solutions dans $\mathbb{R}$. Plus précisément.

> Lorsque $a > 0$, l'équation $X^2 = a$ admet deux solutions, $r = \sqrt{a}$ et $r' = -r = -\sqrt{a}$

> Lorsque $a = 0$, l'équation $X^2 = a$ admet une unique solutions $r = r' = 0$

> Lorsque $a < 0$ l'équation $X^2 = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Pour la démonstration, on utilise des théorèmes et du vocabulaire sur les fonctions qui seront rappelées, expliquées et détaillées dans le chapitre sur les fonctions.
On va étudier la fonction f définie par $f(x) = x^2 - a$.

→ Il est facile de justifier que la fonction f est dé finie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x$

→ On dresse le tableau de variation

→ Grâce au tableau de variation (et au théorème de la bijection-monotone), on déduit que la fonction f réalise une bijection de $\mathscr{D} = [0, +\infty[$ sur $\mathscr{A} = [-a, +\infty[$.
Enfin comme $0 \in \mathscr{A} = [-a, +\infty[$, on sait que l'équation $x^2 = a$ admet exactement 1 solutions dans $\mathscr{D} = [0, +\infty[= \mathbb{R}^+$.

Théorème 1. Autours de $\sqrt{a}$

Définition. Soit a un réel positif.
Le nombre $\sqrt{a}$ est l'unique solution positive de l'équation $X^2 = a$.

> Formulaire. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$

> Comme $\sqrt{a}$ est l'unique solution *positive* de l'équation $x^2 = a$,
ainsi on a $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

> $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ et si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

> Comme $\sqrt{a}$ est solution de l'équation ..., on a $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
MAIS Attention : $\sqrt{a^2} = |a| \neq a$

> Racine Vs puissance. $\sqrt{a} = a^{1/2}$

Démonstration de $\forall\ a, b \geqslant 0,\ \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

> D'une part : D'après les propriétés de $\sqrt{X}$, on a $\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$.
Ainsi $\sqrt{ab}$ est une solution positive de l'équation $X^2 = ab$.

> D'autre part : D'après les propriétés de $\sqrt{X}$ et le formulaire sur les puissances,
on a $\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = (\sqrt{a})^2\left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$.
Ainsi $\sqrt{a}\sqrt{b}$ est aussi une solution positive de l'équation $X^2 = ab$.
Comme l'équation $X^2 = ab$ admet une unique solution positive, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Définition 2. Quantité conjuguée

Soit a un réel positif.

$$\text{La quantité conjuguée de } a-b\sqrt{n}\text{, c'est } a+b\sqrt{n}$$

La quantité conjuguée est utilise pour "gérer" une racine

$$a-b\sqrt{n}=\left(a-b\sqrt{n}\right)\frac{\left(a+b\sqrt{n}\right)}{\left(a+b\sqrt{n}\right)}=\frac{(a)^2-\left(b\sqrt{n}\right)^2}{\textit{Gentil bas avec} +}=\frac{\textit{Plus de Racine}}{\textit{Gentil bas avec} +}$$

$$\frac{1}{a+b\sqrt{n}}=\frac{1}{a+b\sqrt{n}}\frac{\left(a-b\sqrt{n}\right)}{\left(a-b\sqrt{n}\right)}=\frac{a-b\sqrt{n}}{(a)^2-\left(b\sqrt{n}\right)^2}=\frac{Haut}{\textit{Plus de Racine en bas}}$$

2 Racine d'un polynôme et factorisation

Définition 3. C'est quoi un Polynôme

> Un polynôme c'est une objet de la forme $2X^3+3X^2-X+1$
CàD un "mélange" de gentil monôme, $X^0, X^1, X^2, ..., X^{41}$

Théorème. **Développé Vs Factorisé**
Il deux façons visualiser un polynôme

> *Avec ses coef, CàD sous la forme développée (ou algébrique) :*
$P(X) = aX^2 + bX + c$

> *Avec ses racines, CàD sous la forme factorisée :*
$P(X) = a(X-r)(X-r')$

> Une expression polynômiale en $\square$, c'est un "mélange" de gentille $\square$, $\square^0, \square^1, \square^2, ..., \square^{41}$

Exemple.
$e^{3x}+2e^{2x}+1$ est un polynôme en $\square =$
$\cos^2(x)+1$ et $\sin^4(x)+\cos(x)+1$ sont des polynômes en $\square =$

Définition 4. Racine d'un polynôme

Soit $P(X) = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0$ un polynôme et r un nombre dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que r est une racine de P Ssi $P(r) = 0$

Exemple.
$r=1$ est une racine du polynôme $P(X) = X^2-3X+2$
$r=2$ est une racine du polynôme $P(X) = X^3-8$
$r=1$ est une racine du polynôme $P(X) = X^n-1$

Théorème. **Le théorème de factorisation des racines.**

$$\left.\begin{array}{c} P(X) \text{ est un polynôme} \\ \\ r \text{ est une racine de } P(X) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{On peut factoriser } (X-r) \\ \quad \text{CàD } P(x) = (X-r)\left[Un\ autre\ polynôme\right] \end{array}$$

Remarque : le théorème est faux lorsque P n'est pas un polynôme!!!!!!

3 Signe des trinômes.

Pour déterminer le signe d'un trinôme $P(X) = aX^2 + bX + c$,

On recherche ses racines, CàD on résout l'équation
puis on factorise et enfin on fait un Bô tableau de signe.

`On recherche ses racines, CàD on résout l'équation`

Il y a deux situations particulières lorsque le trinôme n'est pas tri.

$\boxed{aX^2 + bX = 0}$

$2X^2 - 3X = 0 \iff X(2X+3) = 0$

Les solutions de l'équation sont $r = 0$ et $r' = -3/2$

$\boxed{aX^2 + c = 0}$

$2X^2 - 3 = 0 \iff X^2 = 3/2$

l'équation admet 2 sol $r = +\sqrt{3/2}$ et $r' = -+\sqrt{3/2}$

Sinon on utilise le discriminant et les célèbres formules

Théorème 5. Signe des trinômes

Le signe de $ax^2 + bx + c$ dépend du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

> Lorsque $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ Alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de ax^2.

> Lorsque $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ Alors $ax^2 + bx + c$ est un carré,

> Lorsque $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'éq admet 2 sol/racine r et r'
> et on a la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x-r)(x-r')$
> puis un bô tableau de signe.

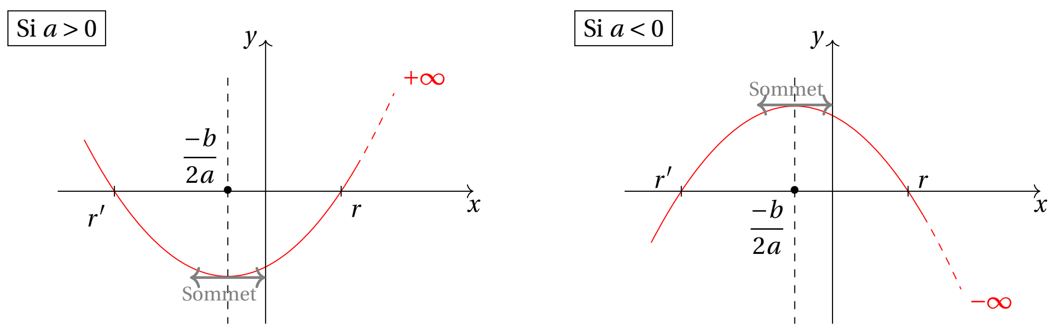
4 Un peu de géométrie

Théorème 6. Géométrie d'un trinôme.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.
On considère la fonction polynômiale T de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(x) = a.x^2 + bx + c.$$

Je note Γ le graphe de la fonction T. On a



De plus la fonction T a les propriétés suivantes

> $T(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} (\text{signe de } a).\infty$

> En $x = -\dfrac{b}{2a}$, la fonction T présente un extremum.

> La droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ est un axe de symétrie du graphe Γ de la fonction T.

`Vocabulaire : La courbe Γ est une parabole.`

Démonstration : Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère la fonction polynômiale T de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $T(x) = a\,x^2 + bx + c$.
Pour la démonstration je suppose $a > 0$.

> **On va montrer que** $T(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$
Si on fait rien, c'est une FI

$$\begin{aligned} \text{On a } \ T(x) &= a.x^2 + bx + c \\ &= ax^2\left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}\right) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.(1+0+0) = +\infty \end{aligned}$$

> **On va montrer qu'il y a un minimum en** $x = \dfrac{-b}{2a}$
On étudie les variations de la fonction T. Avec le tableau variation, il est clair que en $x = \dfrac{-b}{2a}$ la fonction T présente son minimum

> **On va montrer l'axe de symétrie**
Voir exercice

5 Un peu plus difficile.

5.1 Forme canonique et racine.

On considère le trinôme $A(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On a

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{C},\ ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}\right]$$

On cherche à utiliser $(x+\alpha)^2 = x^2 + 2\,\alpha\,x + \alpha^2$

$$= a\left[\underbrace{x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} \ominus \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Application : On en déduit les célèbres formules $r = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

5.2 Décomposition en éléments simples.

Théorème 7. Décomposition en éléments simples.

Soit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.
On considère F la fraction rationnelle

$$\forall x \neq r, r', \quad F(x) = \frac{dx+e}{ax^2+bx+c} \text{ avec } r, r' \text{ les racines du bas.}$$

> Étape 1 : On factorise le trinôme $ax^2+bx+c = a(x-r)(x-r')$

$$\text{Ainsi on a } F(x) = \frac{dx+e}{ax^2+bx+c} = \frac{dx+e}{a(x-r)(x-r')}$$

> Étape 2 : On trouve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \neq r, r', \quad F(x) = \frac{dx+e}{ax^2+bx+c} = \underbrace{\frac{\alpha}{x-r} + \frac{\beta}{x-r'}}_{\text{c'est la décomposition en éléments simples de de la fraction F}} .$$

Exemple. On va décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}$.

Avec Δ, on obtient facilement la factorisation $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-3}$$

$$\iff \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{\alpha(x-3)+\beta(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$\iff \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{(\alpha+\beta)x + (-3\alpha-2\beta)}{(x-2)(x-3)}$$

Je choisis α, β tel que $\begin{cases} \alpha+\beta = 2 & (1) \\ -3\alpha-2\beta = 1 & (2) \end{cases}$

Pour résoudre le système, on mélange (1) et (2)

$(1) + 2 \times (2) \rightsquigarrow -\alpha = 2.2+1 = 5$

$3 \times (1) + (2) \rightsquigarrow \beta = 3.2+1 = 7$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall x \neq 2, 3, \quad \frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{-5}{x-2} + \frac{7}{x-3}}$$

5.3 Lien coef/racines.

Théorème 8. Somme et Produit des racines d'un trinôme.

Soit $T(x)$ un trinôme,

on peut écrire $T(x) = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{développé}} = \underbrace{a(x-r)(x-r')}_{\text{factorisé}}$

Alors on a : $r + r' = {}^{-b}/_{a}$ et $r.r' = {}^{c}/_{a}$

Démonstration : Pour la démonstration, le plus simple est le mieux. Comme on connait l'expression des racines r et r', il est facile de calculer $r + r'$ et $r.r'$.

$$r + r' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 2\frac{-b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$r.r' = \underbrace{(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}).(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})}_{\text{Quantité conjuguée}}$$

$$= \frac{(\ldots)^2 - (\ldots)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Théorème 9. Système d'équation Somme-Produit

Soit x, y deux réels. on a

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = s \\ xy = p \end{array}\right. \iff x \text{ et } y \text{ sont les racines du polynôme } X^2 - sX + p$$

Démonstration : On fait $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$

$\Longrightarrow$ On suppose que $\left\{\begin{array}{l} x + y = s \\ xy = p \end{array}\right.$

On a $y = s - x$, ainsi $xy = x(s-x) = -x^2 + sx = p$

Donc x est bien une racine du polynôme.

De même pour y

$\Longleftarrow$ C'est le théorème précédent.

6 Exercices

Quantité conjuguée

Exercice 1. En utilisant la définition Racine, montrer $\sqrt{4}=2$, puis que $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$

Exercice 2. [Correction] Soit $x>1$ un réel bien choisi. Simplifier l'écriture des réels suivants.
En particulier aucune racine ne doit subsister au dénominateur

$$A=2\sqrt{20}+3\sqrt{5}-2\sqrt{45} \qquad B=\frac{\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}-3} \qquad C=\frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$D=\frac{1}{\sqrt{1+x}-2} \qquad E=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \qquad F=\sqrt{\frac{x+1}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

Exercice 3. [Correction]
Soit la fonction $\left[f: x \longmapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]$.

Montrer que la fonction f est impaire.

Exercice 4. [Correction] Montrer que :
$$\forall x,y \geqslant 0, \quad \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$$

Exercice 5. [Correction] Montrer que :
$$\forall x \geqslant 0, \quad \frac{\sqrt{x}}{1+x} \leqslant \frac{1}{2}$$

Exercice 6. [Correction] Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \sqrt{1+x} \leqslant 1+\frac{1}{2}x$$

Exercice 7. [Correction] Montrer que :
$$\forall \ x \in [1,2], \quad \frac{x}{\sqrt{2x-1}} \leqslant \sqrt{2}$$

Exercice 8. [Correction] Montrer que :
$$\forall \ n \in \mathbb{N}^*, \ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Exercice 9. Soit a, b deux réels positifs. Montrer que
$$\frac{2}{{}^1/_a+{}^1/_b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Autour des Racines

Exercice 10.

1. Justifier que r est racine et faire les factorisations : $X^2+5X+6 \quad r=-2, \qquad X^3-6X-2 \quad r=2$
2. Finir la factorisation : $X^4+1=(X^2+\sqrt{2}X+1)\left[\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère les polynômes
$$X^2-\alpha^2, \quad X^3-\alpha^3, \quad X^4-\alpha^4, \quad \ldots \quad , \quad X^n-\alpha^n$$
Justifier α est une racine puis faire la factorisation par $X-\alpha$

Exercice 11. [Correction] Soit le trinôme $T(X)=X^2+Xy+5X-2y^2+y+6$.
Justifier que $-2y-3$ est une racine du trinôme T puis finir la factorisation.

En déduire la nature géométrique de l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant l'équation
$$x^2+xy+5x-2y^2+y+6=0$$

Trinôme

Exercice 12. Soit T le trinôme défini par $\forall x \in \mathbb{R},\ T(x) = ax^2 + bx + c$.

Montrer que la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ est un axe de symétrie du graphe Γ de la fonction T.

Exercice 13. Résoudre sur $\mathbb{R}$, les équations/inéquations suivantes

$$x^2 + 2x - 2 > 1 \qquad -x^2 - x > 1$$

$$x^8 + 2x^4 - 1 = 0 \qquad e^{2x} - e^x - 2 = 0$$

Exercice 14. [Correction] Montrer que : $\forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ t^2 + 2\cos(x)\,t + 1 \geqslant 0$

Indication : on a $t^2 + 2\cos(x)\,t + 1 = T^2 + 2\cos(x)T + 1$

Exercice 15. [Correction] Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que : $x^2 + xy + 2y^2 = 0 \implies [x = y = 0]$

Indication : on a $x^2 + xy + 2y^2 = X^2 + Xy + 2y^2$

Lien : coef/Racines

Exercice 16. Soit x, y deux réels. Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - x + y^2 - y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Exercice 17. [Correction] On considère le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ {}^1/_x + {}^1/_y = {}^3/_2 \end{cases}$

Je note $s = x + y$ et $p = xy$

Calculer les valeurs possibles de s et p puis déterminer les solutions du système.

Correction.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

$$A = 2\sqrt{4.5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{9.5} = \sqrt{5}\,[.....]$$

$$B = \frac{\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}-3} = \frac{....}{(..)^2-(..)^2}$$

$$C = \frac{...}{2-\sqrt{32}+\sqrt{3}} = \frac{....}{(..)^2-(..)^2}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{1+x}-2} = -\frac{\sqrt{1+x}+2}{(..)^2-(..)^2}$$

$$E = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{(\cdots)^2-(\cdots)^2}{\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right]^2} = \ldots$$

$$F = \sqrt{\frac{x+1}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x}}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) On va montrer brutalement que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) &= \ln(-x+\sqrt{1+x^2}) \\
&= \ln\left(\frac{(...)^2-(...)^2}{-x-\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{-1}{-x-\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{\square}\right) \quad avec\ \square = x+\sqrt{1+x^2} \\
&= -\ln(\square) = -\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = -f(x)
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) Direct + quantité conjuguée.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) Direct

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On y va direct

$$\forall\, x > 0, \quad 1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x} = \frac{(...)^2-(...)^2}{1+\frac{1}{2}x+\sqrt{1+x}} = \frac{{}^1/_4\ x^2}{....>0} \geqslant 0$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé) Direct + quantité conjuguée.

Solution de l'exercice 8 (Énoncé) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(...)^2-(...)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Solution de l'exercice 11 (Énoncé) Soit le trinôme $T(X) = X^2 + Xy + 5X - 2y^2 + y + 6$.

> Comme $T(-2y-3) = \cdots = 0$, le nombre $-2y-3$ est une racine du trinôme T ;

> Comme $r = -2y-3$ est une racine de T, on sait que $(X-r) = X+2y+3$ se factorise

En effet, on a $X^2 + Xy + 5X - 2y^2 + y + 6 = (X+2y+3)(X-y+2)$

> Soit $M(x, y)$ un point du plan, on a

$$x^2 + xy + 5x - 2y^2 + y + 6 = 0 \iff (x+2y+3)(x-y+2) = 0$$
$$\iff \underbrace{x+2y+3=0}_{C'est\ l'eq\ d'une\ droite} \quad ou \quad \underbrace{x-y+2=0}_{C'est\ l'eq\ d'une\ droite}$$

Donc l'ensemble rechercher est la réunion des 2 droites.

Solution de l'exercice 14 (Énoncé) Il y a plusieurs façon de la faire.
On peut factoriser le trinôme $T^2 + 2\cos(x)T + 1$ (ou bien le mettre sous forme canonique)

Comme $\Delta = b^2 - 4ac = 4\cos^2 - 4 = -4\sin^2(x) \leqslant 0$,

Le trinôme est du signe de $\left(1\,T^2\right)$ donc toujours positif. Fini.

Solution de l'exercice 15 (Énoncé) On met le trinôme en X sous forme canonique. Ainsi

$$\begin{aligned}
x^2 + xy + 2y^2 = 0 &\iff \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + 2y^2 = 0 \\
&\iff \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7y^2}{4} = 0 \\
&\iff \begin{cases} \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 = 0 \\ \\ \frac{7y^2}{4} = 0 \end{cases} \\
&\iff x = y = 0
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 17 (Énoncé) On suppose que x, y vérifie le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \\ 1/x + 1/y = 3/2 \end{cases}$

Tout d'abord, comme $1/x + 1/y = 3/2$, on a Forcément x, y sont $\neq 0$.
De plus

> $1/x + 1/y = \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{s}{p}$
donc $1/x + 1/y = 3/2 \iff 2s = 3p$

> $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = (x+y)^2 - 2xy = s^2 - 2p$
donc $x^2 + y^2 = 5 \iff s^2 - 2p = 5$

$$\text{On a donc } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \\ 1/x + 1/y = 3/2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2s = 3p \\ \\ s^2 - 2p = 5 \end{cases}$$

Il est maintenant facile de déterminer s puis p puis x et y.