Les fonctions.

1 Comment calculer une dérivée.

Rédaction type

> On justifie que h est dérivables de $\mathscr{D}'$.

> Puis $\forall\, x \in \mathscr{D}', \quad h'(x) = \dfrac{d}{dx}[h(x)]$ = On calcule la dérivée
$\vdots$
= On simplifie/factorise la dérivée

Reconnaitre/Dériver un monôme.

$$\left.\begin{aligned}
&x^2 \rightsquigarrow 2x\\
&x^3 \rightsquigarrow 3x^2\\
&x^4 \rightsquigarrow 4x^3\\
&\frac{1}{x} = x^{-1} \rightsquigarrow (-1)\,x^{-2} = \frac{-1}{x^2}\\
&\frac{1}{x^2} = x^{-2} \rightsquigarrow (-2)\,x^{-3} = \frac{-2}{x^3}\\
&\sqrt{x} = x^{1/2} \rightsquigarrow (1/2)\,x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\\
&\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \rightsquigarrow (-1/2)\,x^{-3/2} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}\\
&\frac{1}{x^n\sqrt{x}} = x^{-n-1/2} \rightsquigarrow (-n-1/2)\,x^{n-1/2-1} = \frac{-(n+1/2)}{x^{n+1}\sqrt{x}}
\end{aligned}\right\}\ \text{La formule universelle} : x^{\alpha} \rightsquigarrow \alpha\, x^{\alpha-1}$$

Formules classiques.

$$\frac{d}{dx}[2f(x) - 3g(x)] = 2\,[\quad] - 3\,[\quad]$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = [\quad]\,g(x) + f(x)\,[\quad]$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{[\quad]\,g(x) \ominus f(x)\,[\quad]}{[g(x)]^2}$$

Dérivée des composées.

$$\frac{d}{dx}[\ln(u)] = u'.\frac{1}{u} \qquad \frac{d}{dx}[u^2] = u'.2u$$

$$\frac{d}{dx}[e^u] = u'.e^u \qquad \frac{d}{dx}[u^3] = u'.3u^2$$

$$\frac{d}{dx}[\sin(u)] = u'.\cos(u) \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{u}\right] = \frac{d}{dx}[u^{-1}] = u'.(-1)u^{-2} = u'.\frac{-1}{u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[ch(u)] = u'.sh(u) \qquad \frac{d}{dx}[\sqrt{u}] = \frac{d}{dx}[u^{1/2}] = u'.({}^1/_2)u^{-1/2} = u'.\frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\text{Formule générale : } \frac{d}{dx}[f(u)] = u' f'(u)$$

2 Les fonctions usuelles

2.1 Les Monôme, CàD $X^{\texttt{fixe}}$.

Situations Particulières. *On a déjà vu plusieurs manières différents de calculer $x^{\square}$ selon la valeur de $\square$.*

> Lorsque $\square = n$ est un entier > 0. On a alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^n = x.x\ldots x$$

> Lorsque $\square = -n$ est un entier < 0. On a alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x.x\ldots x} = \frac{1}{x}.\frac{1}{x}\ldots.\frac{1}{x}$$

> Lorsque $\square = \dfrac{1}{p}$. On a alors

$$\forall\, a \geqslant 0, \quad a^{1/p} = \sqrt[p]{a} \overset{def}{=} \left|\ \begin{array}{c}\textit{L'unique solution positive}\\ \textit{De l'équation } X^p = a\end{array}\right.$$

Théorème 1. Autour de X^α.

Comment calculer 2^π, $2^{\sqrt{2}}$, $2^{\ln(2)}$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$.

La façon la plus générale définir le nombre x^α est

$$x^\alpha \overset{def}{=} e^{\alpha \ln x}$$

Formulaire

Le formulaire sur les puissances est valide.

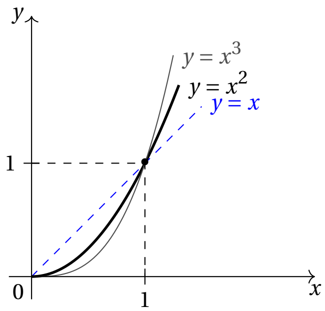
Dérivation

On sait que : $[x^2]' = 2x$, $[x^3]' = 3x^2$, ...

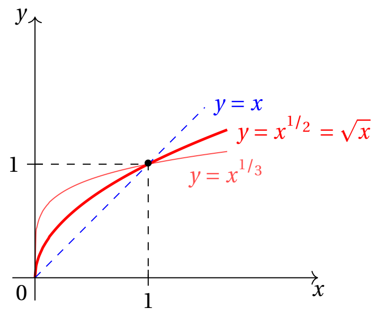
Les fonctions X^α sont dérivable sur $\mathscr{D}' = \mathbb{R}_+^*$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{d}{dx}[x^\alpha] = [x^\alpha]' = \alpha . x^{\alpha-1}$$

Graphe de $x, x^2, x^3, \ldots$



Graphe de $x, x^{1/2}, x^{1/3}, \ldots$



Kulture utile.

> Lorsque $\alpha > 0$, la fonction $[x \longmapsto x^\alpha]$ est croissante.

> Lorsque x est "petit", CàD $x \in]0,1[$

$$0 < x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} = x^{1/2} < 1$$

> Lorsque x est "grand", CàD $x > 1$ $\quad 1 < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3$

2.2 Puissance Bouge, CàD $a^b = a^{\texttt{bouge}}$.

Définition 2.

$$a^b = a^{\texttt{bouge}} \overset{def}{=} e^{b \ln a}$$

On a par exemple

$$\begin{aligned}
2^x &= e^{x \ln 2} \\
x^x &= e^{x \ln x} \\
(\sin x)^x &= e^{x \ln(\sin x)} \\
(\sin x)^{\sin x} &= e^{\sin(x) \ln(\sin x)} \\
(\ln x)^{\ln x} &= e^{\ln(x) \ln(\ln x)}
\end{aligned}$$

Théorème 3. Propriétés de la fonction $x \longmapsto 2^x$.

La fonction $\left[2^X\right]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R},\ \frac{d}{dx}\left[2^x\right] &= \underbrace{\frac{d}{dx}\left[e^{x \ln(2)}\right]'}_{Or\ [e^u]' = u'\, e^u} \\
&= \ln(2)\, e^{x \ln(2)} = \ln(2)\, 2^x
\end{aligned}$$

2.3 Logarithme/Exponentielle

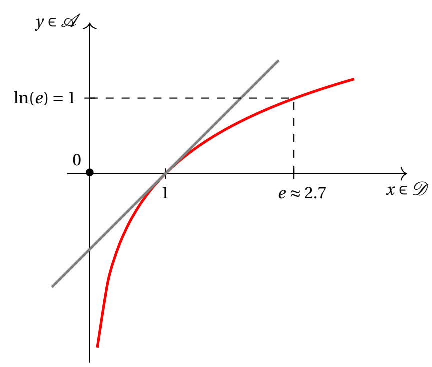
Théorème 4. Propriétés/Formulaire de la fonction ln.

> La fonction ln est dérivable

sur $\mathscr{D} =]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
\forall\, x > 0,\ \frac{d}{dx}\left[\ln(x)\right] &= \left[\ln(x)\right]' \\
&= {}^1/_x
\end{aligned}$$

> Le fonction ln réalise une bijection (one-to-one) de $\mathscr{D} =]0, +\infty[$ sur $\mathrm{Im} = \mathbb{R}$



$\ln(1) = 0 \quad \ln(e) = 1$

Formulaire : $\forall\, a, b, x, \square \in \mathbb{R}_+^*$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \qquad \ln(\square^\alpha) = \alpha \ln(\square)$$

Il y a aussi $\ln\left({}^a/_b\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Attention : les nombres $\ln(a)\ln(b)$ et $\dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$ ne se simplifient pas

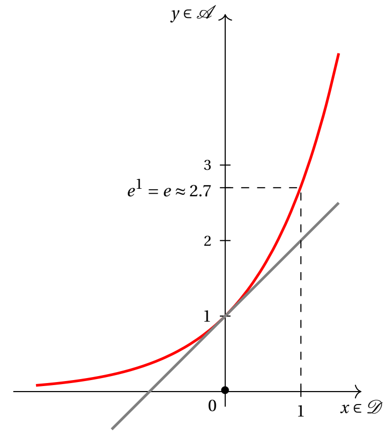
Démonstration : le formulaire se démontre, on le fera en classe.

Théorème 5. Propriétés/Formulaire de la fonction exp.

> La fonction ln est dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$$\forall\, x > 0,\ \frac{d}{dx}\left[\, e^x \,\right] = \left[\, e^x \,\right]' = e^x$$

> > Le fonction exp réalise une bijection (one-to-one) de $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ sur $\mathrm{Im} =]0, +\infty[$



Formulaire : e^x c'est une puissance
donc c'est le formulaire sur les puissances est valide.

Démonstration : le formulaire se démontre mais c'est plus délicat. On y a reviendra plus tard.

Théorème 6. Lien entre ln **et** exp.

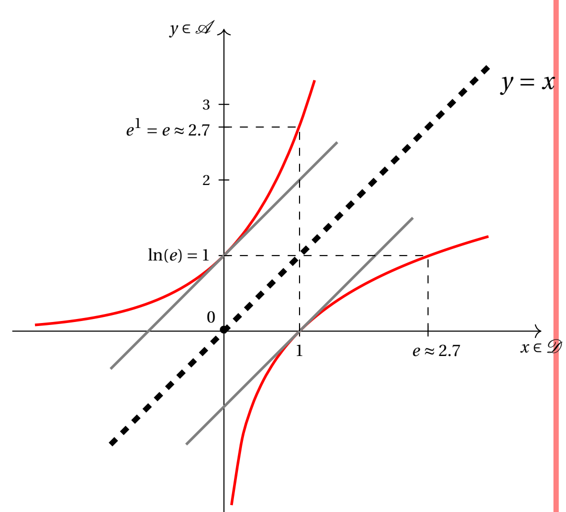
Les fonctions ln et exp forment un couple
Bijection/Réciproque,

$$\text{CàD } \forall x > 0,\ y \in \mathbb{R} \quad \ln(x) = y \iff x = \exp(y)$$

De plus

> $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$

> $\forall x > 0,\ e^{\ln(x)} = x$

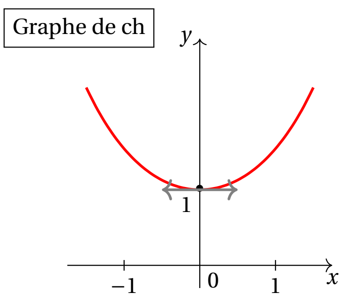


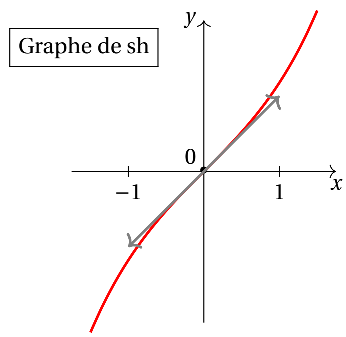
2.4 Sinus hyperbolique,.....

Définition 7.
Les fonctions cosinus hyperboliques et sinus hyperbolique sur $\mathbb{R}$, notées respectivement ch et sh, sont définies de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad et \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Théorème 8. Propriétés des fonctions sinh **et** cosh**.**





Propriétés des fonctions ch et sh

> Comme la fonction Cosinus, la fonction ch est dérivable, paire et $ch(0) = 1$.
De plus $\forall\, x \in \mathbb{R},\ ch'(x) = [ch(x)]' = sh(x)$. Complément : $[ch(u)]' = u'.sh(u)$

> Comme la fonction Sinus, la fonction sh est dérivable, impaire et $sh(0) = 0$.
de plus $\forall\, x \in \mathbb{R},\ sh'(x) = [ch(x)]' = ch(x)$. Complément : $[sh(u)]' = u'.ch(u)$

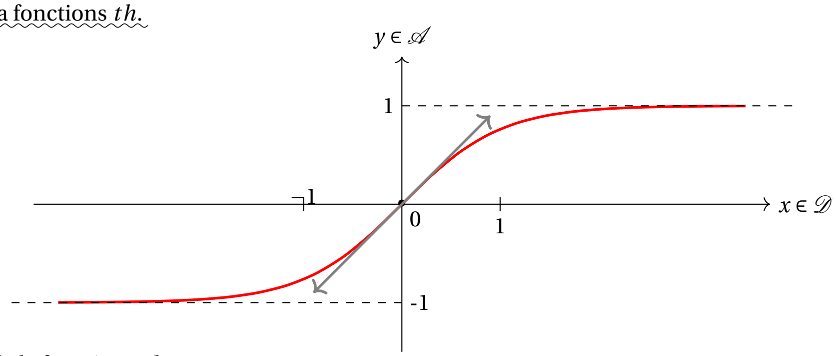
> $\forall\, x \in \mathbb{R},\ ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

Tangente hyperbolique (th ou tanh)

Théorème 9. Définition et propriétés de th
La fonction tangente hyperbolique, notées th, est définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad th(x) \overset{def}{=} \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Graphe de la fonctions th.



Propriétés de la fonctions th.

> La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$.

> La fonction th est strictement croissante, impaire sur $\mathbb{R}$.

> On a les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} th(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} th(x) = -1$

> La fonction th réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

3 Notion de fonction.

3.1 Ensemble de définition.

Définition 10.

Qu'est ce qu'une fonction ?

Une fonction f de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$ est une correspondance
qui, à tous éléments x de $\mathscr{D}$ associe un unique élément de $\mathscr{A}$, noté $f(x)$.

Notations classiques : f ou $[f : x \mapsto f(x)]$ ou $\left[f : \begin{array}{c} \mathscr{D} \to \mathscr{A} \\ x \mapsto f(x) \end{array}\right]$

Ensemble de $\mathscr{D}$éfinition.

$\mathscr{D}$, c'est l'ensemble de Définition/Départ de la fonction f.

Comment déterminer $\mathscr{D}$?

On sait que : $x \in \mathscr{D} \iff$ on peut calculer le nombre $f(x)$

Rédaction type pour $\mathscr{D}$.

On peut calculer le nombre $f(x)$ Ssi $\left\{ \begin{array}{c} \text{Liste} \\ \text{des conditions} \end{array} \right.$

Conclusion : la fonction f est définie sur $\mathscr{D} =$ ....

Théorème 11.

On considère une fonction numérique f de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$

> Ne pas confondre : la fonction f et le nombre $f(x)$.

Plus précisément $f(x)$ c'est la fonction évaluée, appliquée en x.

> La grande propriété "évidente" des fonctions : Lorsque $x = 2$ alors $f(x) = f(2)$

Plus généralement, Lorsque $x = x'$ alors $f(x) = f(x')$

3.2 Paire-impaire, Périodique,...Avec des quantificateurs

Définition 12.

On considère f une fonction numérique définie sur $\mathscr{D}$.

Paire/impaire.

> On dit que la fonction f est paire Ssi ....

> On dit que la fonction f est impaire Ssi ....

Périodique.

On dit que la fonction f est T-périodique Ssi ....

croissante.

On dit que la fonction f est croissante Ssi ....

Majorée.

On dit que la fonction f est Majorée Ssi ....

Bornée.

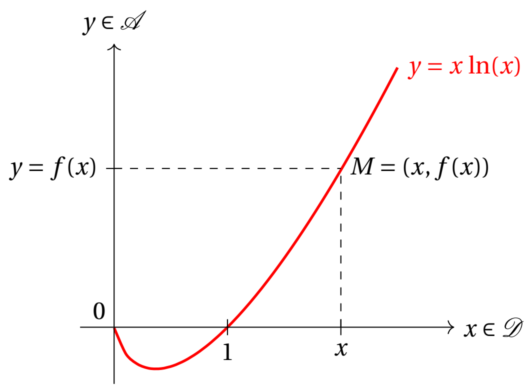
On dit que la fonction f est Bornée Ssi ....

3.3 Antécédent et Graphe

Définition 13. Représentation graphique

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathscr{D}$

La représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormé est la collection des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x varie dans $\mathscr{D}$.



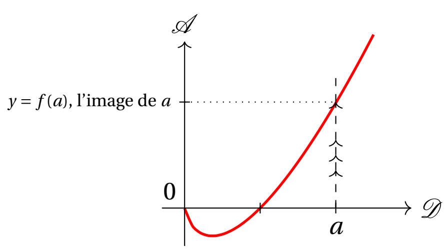
Définition 14. Antécédent-Image.

Soit une fonction f de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$ et $x \in \mathscr{D}$ et $y \in \mathscr{A}$.

On suppose que $y = f(x)$

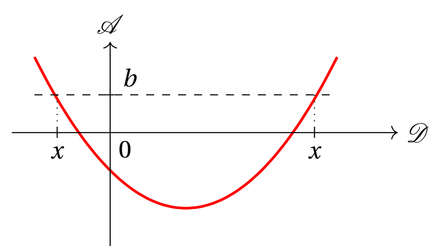
Du point de vue de $x = a$.

Comme $y = f(a)$,
on dit que y est l'image de a.



Du point de vue de $y = b$.

Comme $b = f(x)$,
on dit que x est un antécédent de b.



`Théorème` : Les antécédents de b sont les solutions de l'équation $f(X) = b$

4 Opérations sur les fonctions.

4.1 Somme, Produit, Quotient, Composée.

Définition 15.

Somme-Produit-Quotient

On considère f et g deux fonctions numérique définie respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$

On définit les fonctions

$$[f+g] : x \longmapsto f(x)+g(x), \quad [fg] : x \longmapsto f(x).g(x) \quad \text{et} \quad \left[\frac{1}{f}\right] : x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$$

Composée des fonctions

On considère f et g deux fonctions numériques

On appelle composée de f et g, notée $g \circ f$ la fonction

$$(g \circ f) : x \longmapsto g(f(x)) = g(\square) \text{ avec } \square = f(x).$$

On peut détailler en écrivant $x \xmapsto{f} f(x) = y \xmapsto{g} g(y) = g\big(f(x)\big)$

`Attention` **: En général** $g \circ f \neq f \circ g$

Théorème 16. Ensemble de définition de $g \circ f$

> Au brouillon, on identifie : $x \xmapsto{f} f(x) = \square \xmapsto{g} g(\square) = g\big(f(x)\big)$

> Puis on rédige.

On peut calculer le nombre $h(g(f(x)))$ Ssi $\begin{cases} x \in \mathscr{D}_f \\ y = \square = f(x) \in \mathscr{D}_g \end{cases}$

4.2 Continuité et Dérivabilité.

Définition 17. Continue.

On considère f une fonction numérique et $a \in \mathscr{D}$.

Définition de Continue.

La fonction f est continue en a Ssi $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$

Interprétation "intuitive".

Quand x se rapproche de a alors le nombre $f(x)$ se rapproche du nombre $f(a)$

Interprétation géométrique.

Le graphe de la fonction f n'a pas de discontinuité au point a.

Complément : On dit que la fonction f est continue sur $\mathscr{D}$

Ssi la fonction f est continue en tous les points de $\mathscr{D}$.

Théorème 18. Les résultats classiques

> Toutes fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition.

> Les fonctions fabriquées avec les fonctions usuelles et les opérations classiques sont continues.

Définition 19. Dérivable

On considère f une fonction numérique et $a \in \mathscr{D}$.

Dérivable. La fonction f est dérivable en a Ssi $T_{aux}(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$

On note alors $\ell = f'(a)$.

Interprétation géométrique.

Le graphe de la fonction f admet une tangente au point a.

Complément : On dit que la fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}$

Ssi la fonction f est dérivable en tous les points de $\mathscr{D}$.

Théorème 20. Dérivable

Dérivabilité des fonctions usuelles.

Les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition,

sauf la fonction $\left[\sqrt{X}\right]$ qui est définie et continue en $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $[\sqrt{X}]$ n'est pas dérivable en 0.

Attention, Les réciproques sont fausses. On a

$$f \text{ est dérivable sur } \mathscr{D} \implies f \text{ est continue sur } \mathscr{D} \implies f \text{ est définie sur } \mathscr{D}$$

Contre-Exemples

> la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas continue $\mathbb{R}$.
`Plus précisément`. Elle est continue en a Ssi $a \notin \mathbb{Z}$ et elle n'est pas continue en a Ssi $a \in \mathbb{Z}$.

> la fonction $x \mapsto |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ continue $\mathbb{R}$.
`Plus précisément`. Elle n'est pas dérivable en 0.

Théorème 21. Règles classiques de dérivations

On considère f et g deux fonctions dérivables sur $\mathscr{D}$

> Alors $\forall\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur $\mathscr{D}$.
De plus $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$

> Alors la fonction $f.g$ est dérivable sur $\mathscr{D}$.
De plus $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$

> Si de plus g ne n'annule pas alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathscr{D}$.
De plus $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$

> On considère f et u deux fonctions dérivables.
On suppose que la composée $f \circ u$ est définie sur $\mathscr{D}$.
Alors la fonction $f \circ u$ est dérivable sur $\mathscr{D}$. De plus on a

$$(f \circ u)' = u'.(f' \circ u), \text{ CàD } \frac{d}{dx}[f(u)] = u'.f'(u)$$

5 Variations des fonctions.

Définition 22.
Soit f une fonction numérique définie sur $\mathscr{D}$ et $I \subset \mathscr{D}$

> On dit que la fonction f est croissante sur I Ssi

$$\forall\ x, x' \in I, \quad \left[\ x \leqslant x' \ \Rightarrow f(x) \leqslant f(x')\right]$$

`interprétation : une fonction croissante conserve les inégalités.`

> On dit que la fonction f est décroissante sur I Ssi

$$\forall\ x, x' \in I, \quad \left[\ x \leqslant x' \ \Rightarrow f(x) \geqslant f(x')\right]$$

`interprétation : une fonction décroissante inverse les inégalités.`

Théorème. Pour déterminer le variation d'une fonction

> On détermine $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$

> On calcule f' puis on FFB.

> On conclut avec un bô tableau de signe/variation.

Exemples

> La fonction $Sinus$ est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

> La fonction $Sinus$ est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

> La fonction $Sinus$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

6 Exercice

Calcul de dérivée

Exercice 1. Calculer la dérivée pour les fonctions suivantes On ne cherchera pas à déterminer $\mathcal{D}'$, l'ensemble de dérivation.

$$e^{-x} \qquad \frac{x}{e^x-1} \qquad exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \qquad \frac{1}{\ln(3-2x)}$$

$$\ln(1-\ln x) \qquad \frac{1}{\ln(4x-4x^2)} \qquad \sin\left(\frac{\ln(2x)}{2}\right) \qquad x^x$$

Exercice 2. Calculer la dérivée On ne cherchera pas à déterminer $\mathcal{D}'$, l'ensemble de dérivation.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad \sqrt{1-2\sqrt{1-x}}, \quad \sqrt{x^2-2x-3}, \quad (\ln x)^{\ln x}$$

Exercice 3. Pour les fonction suivantes, déterminer $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et calculer f'

$$f(x)=\ln(2-x) \quad , \quad f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad , \quad f(x)=\sqrt{\ln(\ln(x))} \quad , \quad f(x)=\frac{\sqrt{3x+7}}{4-x^2}$$

Exercice 4. [Correction] Montrer que la fonction définie par l'expression $f(x,y)=y.\ln(x^2-y^2)$ vérifie

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{f(x,y)}{y^2}$$

cosh, sinh, tanh

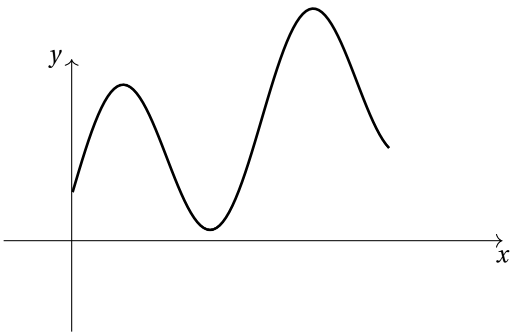
Exercice 5. Soit $a,b\in\mathbb{R}$. Montrer que $\cosh^2(a)-\sinh^2(a)=1$

Exercice 6. Soit $a,b\in\mathbb{R}$. Montrer les formules suivantes

$$\cosh(a+b)=\cosh(a)\cosh(b)+\sinh(a)\sinh(b)$$
$$\sinh(a+b)=\sinh(a)\cosh(b)+\cosh(a)\sinh(b)$$
$$\tanh(a+b)=\frac{\tanh(a)+\tanh(b)}{1+\tanh(a)\tanh(b)}$$

Généralités

Exercice 7. On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x)$ donnée approximativement par le graphe suivant



Dessiner les graphes approximatifs des fonctions suivantes

$f : x \longmapsto f(x)+1$

$f : x \longmapsto f(x+1)$

$f : x \longmapsto f(2x)$

Exercice 8. [Correction] Montrer que les fonction suivantes sont impaires, CàD que $\forall x \in \mathscr{D},\ f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2021+x}{2021-x}\right) \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \quad \text{et} \quad f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$ Plus difficile

Étude de fonctions

Exercice 9. Pour les fonction suivantes, déterminer $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ et calculer f'

$$f(x) = \ln(2-x) \quad , \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad , \quad f(x) = \sqrt{\ln(\ln(x))} \quad , \quad f(x) = \frac{\sqrt{3x+7}}{4-x^2}$$

Exercice 10. Étudier la fonction $h : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)$

Exercice 11. À l'aide d'étude de fonction, démontrer les inégalités suivantes (et interpréter géométriquement)

$$\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x \qquad \forall x \geqslant -1,\ \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{1}{2}x \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

Exercice 12. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

Calculer et simplifier $f'(x)$

Exercice 13. On admet qu'il existe une fonction $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Déterminer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Calculer *et simplifier* f'.

Exercice 14. On admet qu'il existe une fonction $arcsin$ définie, continue sur $[-1,1]$ et dérivable sauf aux bornes

On considère la fonction f définie par $f : x \longmapsto f(x) = \arcsin\left(\sqrt{x}\right) - \dfrac{1}{2}\arcsin(2x-1)$

Déterminer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Calculer *et simplifier* f'.

Exercice 15. [Correction] Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad ab \leqslant b\ln b + e^{a-1}$

Correction.

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{2x}{x^2-y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln(x^2-y^2) + y\frac{-2y}{x^2-y^2} = \ln(x^2-y^2) - \frac{2y^2}{x^2-y^2}$$

$$\begin{aligned} \textit{Ainsi } \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2-y^2} + \frac{1}{y}\ln(x^2-y^2) - \frac{2y}{x^2-y^2} \\ &= \frac{1}{y}\ln(x^2-y^2) \\ &= \frac{1}{y^2}\left[y.\ln(x^2-y^2)\right] = \frac{1}{y^2}f(x,y) \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé) On a

$$f(-x) = \ln\left(\frac{2021-x}{2021+x}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Or on a la formule } \ln\left(\frac{1}{\square}\right) = \ln(\square) = -\ln\left(\frac{\square}{1}\right) \\ \qquad \text{CàD } \ln\left(\frac{Haut}{Bas}\right) = -\ln\left(\frac{Bas}{Haut}\right) \end{array}}$$

$$= -\ln\left(\frac{2021+x}{2021-x}\right) = -f(x)$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} \\ &= \frac{\frac{1}{e^{2x}}-1}{\frac{1}{e^{2x}}+1} \\ &= \cdots = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = -f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(\cdots)^2-(\cdots)^2}{\sqrt{1+x^2}+1}\right) \\ &= \cdots = -f(x) \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 15 (Énoncé)
On fixe une des 2 variables puis on fait une étude de fonction.