# Les Sommes



**Théorème 1. Combien d'entier !**
Il y a la formule générale

nbr de terme = Fin - Début +1

## 1 Les Sommes classiques.

On peut écrire une somme de deux façons différentes

> Présentation développée avec $\cdots$, CàD $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

> Avec le symbole $\sum$, CàD $\sum_{k=1}^{n} a_k$ *ou* $\sum_{i=1}^{i=n} a_i$ *ou* $\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j$ *ou* $\sum_{\ell\in\{1,2,\dots,n\}} a_\ell$

**Définition 2.**

$$\sum_{k=1}^{n} \quad \text{signifie : On somme de } k=1 \text{ à } k=n$$

Dans une somme,

> il faut bien comprendre le rôle et le sens de l'indice **Fantôme** de sommation.

> Il faut être capable de jongler entre «Présentation développé» et «symbole $\sum$»

**Exercice 1.** [Correction] Écrire les sommes suivantes avec un symbole $\sum$ ou développer

$$S_1 = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n}$$
$$S_2 = 2^{n-1} + 3^2.2^{n-2} + 3^4.2^{n-3} + \cdots + 3^{2n-2}$$
$$S_3 = \sum_{\substack{k=1 \\ k\,pair}}^{2018} \frac{1}{k^2} \qquad S_3' = \sum_{\substack{k=1 \\ k\,impair}}^{2018} \frac{1}{k^2}$$
$$S_4 = \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p}$$ Rappel : $\mathscr{P}$ c'est l'ensemble des nombres premiers

**Exercice 2.** [Correction] On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$U_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad et \quad V_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

1. Déterminer les signe de $U_{n+1} - U_n$ et de $V_{n+1} - V_n$.
2. Montrer que : $V_n - U_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

# 2 Opérations.

## 2.1 Opérations "simples".

**Théorème 3.**
Soit $a_0, a_1, ..., a_n$ et $b_0, b_1, ..., b_n$ des complexes, on a

> **Les sommes classiques**

$$1+1+1+...+1 = \textit{le nombre de plateau}$$
$$1+2+3+...+\square = \frac{\square(\square+1)}{2}$$
$$1^2+2^2+3^2+...+\square^2 = \frac{\square(\square+1)(2\square+1)}{6}$$

> **Regrouper, distribuer.**

On peut regrouper et distribuer les sommes finies

$$\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) \qquad et \qquad \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

> **Factoriser.**

On peut factoriser.

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \underline{\textit{avec } \lambda \textit{ ne dépend pas de k}}$$

> **Disjonction pair-impair.**

On a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \overset{def}{=} \sum_{\substack{k=0\\ tous}}^{n} a_k = \sum_{\substack{k=0\\ k\,pair}}^{n} a_k + \sum_{\substack{k=0\\ k\,impair}}^{n} a_k$$

avec $\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k\,pair}}^{n} a_k = a_0 + a_2 + a_4 + ...$ et $\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k\,impair}}^{n} a_k = a_1 + a_3 + a_5 + ...$

Démonstration : Les démonstrations sont évidentes dès que l'on détaille les sommes sous forme développées

$$\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} b_k = (a_0 + a_1 + ... + a_n) - (b_0 + b_1 + ... + b_n) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) + .... + (a_n - b_n) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)$$
$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) = \lambda a_0 + \lambda a_1 + ... + \lambda a_n = \lambda(a_0 + a_1 + ... + a_n) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k$$
$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{\substack{k=0\\ tous}}^{n} a_k = a_0 + a_1 + ... + a_n = (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) + (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$$

**Exercice 3.** [Correction] Calculer les sommes et les produits suivants

$$\sum_{k=1}^{n} k+1 \overset{def}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)+1, \quad \sum_{k=1}^{n} (k+1), \quad \sum_{k=n}^{3n} (3k-1), \quad \sum_{i=0}^{n} i(i+2), \quad \sum_{k=1}^{2n} \max(k,n)$$
$$\prod_{k=1}^{n} \left(2k.2^k\right), \quad \prod_{k=1}^{n} (-2)^k$$

**Exercice 4.** [Correction] On admet *dans cette exercice* que les sommes infinies se manipulent comme des sommes finies.
Sachant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ k\,pair}}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\displaystyle S_3' = \sum_{\substack{k=1\\ k\,impair}}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

## 2.2 Ré-indexation

**Définition 4.**

Une ré-indexation consiste à changer l'indice de sommation mais la somme, elle, ne change pas.

**Exemple.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère que $S = 1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k$

Je ré-indexe la somme avec $k = n+1-p$,

On sait que $S = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{k=n} k$

et on remplace $k$ par $n+1-p$, ainsi

$$S = \sum_{k=1}^{k=n} \underbrace{k}_{} = \sum_{n+1-p=1}^{n+1-p=n} \underbrace{\dots\dots\dots}_{k=n+1-p} = \sum_{p=n}^{p=1} (n+1-p)$$

$$\begin{aligned}
\textit{Conclusion : } S &= \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{k=n} k \\
&= \sum_{p=n}^{p=1} (n+1-p) \\
&\textit{On remet les bornes en croissant} \\
&= \sum_{p=1}^{n} (n+1-p)
\end{aligned}$$

*La ré-indexation est finie et le calcul se poursuit*

$$\begin{aligned}
S = 1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{p=1}^{n} (n+1-p) \\
&= \textit{ On distribue} \\
&= \sum_{p=1}^{n} (n+1) - \sum_{p=1}^{n} p \\
&\textit{On calcule les sommes} \\
&= (n+1) \times nbr\,de\,plateau - S \\
&\Longrightarrow 2S = (n+1)n \Longrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

**Exercice 5.** [Correction] Ré-indexation

1. Soit la somme $A_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.
   Ré-indexer avec $k = n-p$ puis en déduire la valeur de $A_n = \sum_{k=1}^{n} k$.

2. Soit la somme $B_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$.
   Re-indexer avec $k = p+1$ puis en déduire la valeur de $B_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$.

# 3 Somme géométrique.

**Théorème 5. L'indispensable formule des sommes géométrique**

$$Lorsque\,\square \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} \square^k = \frac{1-\square^{n+1}}{1-\square}$$

**Exercice 6.** [Correction]

1. Calculer les sommes suivantes

$$1+q^2+q^4+\cdots+q^{2n} \qquad 1-q+q^2-q^3+\cdots+(-1)^n q^n \qquad 1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+\cdots+2^n$$

2. Soit $x \in \mathbb{C}^*$. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k, \quad \sum_{k=0}^{n}\left(2^{2k+n}.3^{n-3k}\right), \quad 2^{n-1}+3^2.2^{n-2}+3^4.2^{n-3}+\ldots+3^{2n-2}$$

3. Calculer les produits suivants $\prod_{k=1}^{n}\left(2k.2^k\right), \quad \prod_{k=1}^{n}(-2)^k$

**Exercice 7.** Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$$

**Exercice 8.** À l'aide des sommes géo, montrer que

$$\forall \ a,b \in \mathbb{C}, \ a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots.+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

**Exercice 9.** [Correction] Rappel : On sait que $2017 = 7.10^0+1.10^1+0.10^2+2.10^3$

Calculer $\underbrace{11\cdots1}_{n\,fois}$ puis $1+11+111+1111+\ldots..+\underbrace{11\cdots1}_{n\,fois}$

**Exercice 10.** [Correction] Soit $x \in \mathbb{C}-\{1\}$. On va avec différentes méthodes, calculer $\sum_{k=0}^{n} kx^k$

1. Méthode 1. Montrer que : $\sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$.
2. Méthode 2. Finir le calcul suivant

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kx^k &= 0+1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}\\ &= [x]'+[x^2]'+[x^3]'+\ldots..++[x^n]'\\ &= \ldots\ldots.\end{aligned}$$

3. Méthode 3. Re-indexer la somme avec $k=p+1$ puis conclure.

# 4 Dominos ou Somme Télescopique.

**Exemple 1**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

**Q1.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $a, b$ tel que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} - \dfrac{b}{k+1}$

**Q2.** En déduire la valeur de $S_n$.

**Q3.** La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

**Théorème 6. Synthèse de la méthode.**

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{Début}^{fin} \underbrace{Plateau} &= \text{On modifiie le plateau avec l'indication du texte.} \\ &= \text{On détaille les "nouvô" plateaux} \\ &= \textit{On simplifie} \end{aligned}$$

**Exercice 11.** Montrer qu'il existe $a, b, c$ tel que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$

En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

**Exercice 12.** À l'aide des domino, montrer que

$$\forall\ a, b \in \mathbb{C},\ a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + .... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

**Exercice 13.** [Correction] Simplifier $(n+1)^3 - n^3$.

En déduire le calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

# 5 Somme du binôme.

**Définition 7. Coefficient du binôme d'ordre $n, k$**

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, CàD $0 \leqslant k \leqslant n$

Le coefficient du binôme d'ordre $n, k$ est le nombre : $\binom{n}{k} \overset{def}{=} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

**Théorème 8. Propriétés des coefficients du binôme.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

> **À savoir :**

Les coefficients sont des entiers et on a $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$

> **Triangle de Pascal et formule du pochoir.**

Les coefficients se disposent en triangle et on a la formule $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

> **Propriétés de la ligne $n$ du triangle.**

- *début-fin :* La ligne n est de la forme : $1, n, \ldots, n, 1$
- *Symétrie :* On a $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
- *Maximum :* Les coefficients sont croissants de $k = 0$ à $k = n/2$ et décroissante de ....

  Conséquence : le plus gros coefficient est donc au milieu

**Formule(s) du Binôme de Newton.**

Soit $\square, a, b \in \mathbb{C}$. Alors on a

$$(1+\square)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \square^k \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

**Exercice 14.** [Correction] Soit $x \in \mathbb{C}$. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} x^k$$

**Exercice 15.** [Correction]

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ tous}}^{n} \binom{n}{k}$.
2. En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, Calculer

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\ pair}}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} \cdots \text{ et } \sum_{\substack{k=1 \\ k\ impair}}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} \cdots.$$

# 6 Majorer/minorer/Encadrer une somme.

**Théorème 9. Comment majorer une somme**

On considère la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{Bof_k}_{\text{plateau n°k}}$

> Étape 1. Pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$,
on majore $\underbrace{Bof_k}_{\text{plateau n°k}} \leqslant M_k$ *avec Wikking ou Q1*

> Étape 2. On somme l'inégalité de $k = 0$ à $k = n$
Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} M_k$
$\leqslant$ *On calcule la somme*

**Exercice 16.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geqslant 1$. On sait que : $t^n - 1 = (t-1)\left[t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + t + 1\right]$
Montrer que : $t^n - 1 \leqslant n t^{n-1}(t-1)$

**Exercice 17.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2} \leqslant H_{2n} - H_n \leqslant 1$

**Exercice 18.** [Correction] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \ln(n+1) \leqslant H_n$

**Exercice 19.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. Montrer que : $\forall\, n \geqslant 2$, $\quad \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$
2. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\quad S_n \leqslant 2$.
3. La suite $(S_n)$ converge-t-elle ?

**Exercice 20.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right)$

1. Montrer que : $\forall\, x \geqslant 0$, $\quad \ln(1+x) \leqslant x$
2. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\quad S_n \leqslant {}^{3}/_{2}$
3. La suite $(S_n)$ converge-t-elle ?

# Correction.

**Solution de l'exercice 1 (Énoncé)** On a

> $S_1 = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^n.$
>
> $S_2 = 2^{n-1} + 3^2.2^{n-2} + 3^4.2^{n-3} + \cdots + 3^{2n-2} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-1-k} (3^2)^k$
>
> $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots.$

**Solution de l'exercice 2 (Énoncé)**

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &\textit{On simplifie la partie commune.} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{k=2n+1} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{k=2n+2} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{k=n+1} \\ &= \frac{(2n+2)+(2n+1)-2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

La suite $(U_n)$ est croissante.

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\ &\textit{On simplifie la partie commune.} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{k=2n+1} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{k=2n+2} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{k=n} \\ &= \frac{2n(n+1)+n(2n+1)-2(2n+1)(n+1)}{2n(2n+1)(n+1)} = \frac{-3n-2}{2n(2n+1)(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

La suite $(V_n)$ est décroissante.

$$\begin{aligned} V_n - U_n &= \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &\textit{On simplifie la partie commune.} \\ &= \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

**Solution de l'exercice 3 (Énoncé)**

Les sommes

> $\sum_{k=1}^{n} k + 1 = \left[\sum_{k=1}^{n} k\right] + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1$
>
> $\sum_{k=1}^{n} (k+1) = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n$
>
> $\sum_{k=n}^{3n} (3k-1) = 3\sum_{k=n}^{3n} k - \sum_{k=n}^{3n} 1 = 3\left[\frac{3n(3n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2}\right] - 1(3n-n+1)$
>
> $\sum_{i=0}^{n} i(i+2) = \sum_{i=0}^{n} (i^2+2i) = \sum_{i=0}^{n} i^2 + 2\sum_{i=0}^{n} i$
>
> $\sum_{k=1}^{2n} \max(k,n) = \sum_{k=1}^{n} \max(k,n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \max(k,n) = \sum_{k=1}^{n} n + \sum_{k=n+1}^{2n} k$

Les Produits

$> \prod_{k=1}^{n}\left(2k.2^k\right) = \underbrace{2.2^1}\underbrace{2.2.2^2}\underbrace{2.3.2^3}....\underbrace{2.n.2^n} = 2^n n! 2^{1+2+3+\cdots+n}$

De plus $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$> \prod_{k=1}^{n}(-2)^k = \underbrace{(-2)}\underbrace{(-2)^2}\underbrace{(-2)^3}....\underbrace{(-2)^n} = (-1)^{1+2+3+\cdots+n}2^{1+2+3+\cdots+n}$

**Solution de l'exercice 4 (Énoncé)** On a

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\, pair}}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \text{ On réindexe avec } k=2p$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{4p^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$$

De plus $\sum_{tous}^{\infty}\cdots = \sum_{pair}^{\infty}\cdots + \sum_{impair}^{\infty}\cdots$, ainsi

$$\sum_{impair}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{tous}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \sum_{pair}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

**Solution de l'exercice 5 (Énoncé)**

$$\begin{aligned}
A_n &= \text{ Voir exemple du cours.} \\
B_n &= \sum_{k=1}^{n} k2^k \\
&\quad \text{On réindexe avec } p = k+1 \\
&= \sum_{p=0}^{n-1}(k+1)2^{k+1} \\
&= \sum_{p=0}^{n-1}(k+1)2^k 2 \\
&= 2\sum_{p=0}^{n-1}k2^k + 2\sum_{p=0}^{n-1}2^k \\
&= 2\left[B_{n-1} + \underbrace{0}_{p=0}\right] + 2\times(Somme\ Géo) \\
&= 2\left[B_n - \underbrace{n2^n}_{p=n}\right] + 2\times\frac{1-2^n}{1-2} \\
&\quad \text{On en déduit la valeur de } B_n
\end{aligned}$$

**Solution de l'exercice 6 (Énoncé)**

1. On a

$> 1+q^2+q^4+\cdots+q^{2n}$. On applique la formule avec $\square = q$ et $2n$.

$> 1-q+q^2-q^3+\cdots+(-1)^n q^n = 1+\square+\square^2+\cdots+\square^n$ avec $\square = -q$.
On applique la formule.

$> 1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+\cdots+2^n = 1+\square+\square^2+\cdots+\square^{2n}$ avec $\square = \sqrt{2}$.
On applique la formule avec $\square = \sqrt{2}$ et $2n$.

2. On a

> $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, x^k = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k = 1+\square+...+\square^n$

> $\sum_{k=0}^{n}(2^{2k+n}.3^{n-3k}) = \sum_{k=0}^{n} 2^n\,(2^2)^k\,3^n\,(3^{-3})^k = 2^n 3^n \sum_{k=0}^{n}(2^2\,3^{-3})^k = 2^n 3^n(1+\square+...+\square^n)$ avec $\square = {}^4/_{27}$

> $2^{n-1}+3^2.2^{n-2}+3^4.2^{n-3}+...+3^{2n-2} = \sum_{k=0}^{n-1}\left[2^{n-1-k}\ ,3^{2k}\right]$ puis on continue comme ci-dessus.

**Solution de l'exercice 9 (Énoncé)** On a $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \underbrace{11\cdots1}_{n\,fois} = 1+10+10^2+\cdots+10^{n-1} = \dfrac{1-10^n}{1-10} = \dfrac{10^n-1}{9}$

Ainsi

$$\begin{aligned}\forall\, n\in\mathbb{N},\quad 1+11+...+\underbrace{11\cdots1}_{n\,fois} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{10^k-1}{9}\\ &= \frac{1}{9}\left[\sum_{k=1}^{n}10^k-\sum_{k=1}^{n}1\right]\\ &= \frac{1}{9}\left[\frac{10^{n+1}-1}{9}-n\right] = \frac{10^{n+1}-9n-1}{9^2}\end{aligned}$$

**Solution de l'exercice 10 (Énoncé)**

1. Récurrence.
2. $$\begin{aligned}1+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1} &= [x]'+\left[x^2\right]'+\left[x^3\right]'+.....++\left[x^n\right]'\\ &= \left[x+x^2+x^3+\cdots+x^n\right]'\\ &= \left[x(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1})\right]'\\ &= \left[x\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\right]'\end{aligned}$$
3. Voir exercice 4.

**Solution de l'exercice 13 (Énoncé)**

On a $\forall\, k\in\mathbb{N},\ (k+1)^3-k^3 = 3\,k^2+3\,k+1$
On somme l'égalité de $k=1$ à $k=n$ ainsi

$$\sum_{k=1}^{n}\underbrace{(k+1)^3-k^3}=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{3\,k^2+3\,k+1}$$

> À Gauche : $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3-k^3\right] = \ Domino\ = (n+1)^3-1^3.$

> À Droite : $\sum_{k=1}^{n}\left[3\,k^2+3\,k+1\right] = 3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1 = 3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\dfrac{n(n+1)}{2}+n$

Conclusion : $\sum_{k=1}^{n}k^2 = \dfrac{1}{3}\left[(n+1)^3-1-3\dfrac{n(n+1)}{2}-n\right] = \cdots = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**Solution de l'exercice 14 (Énoncé)** On a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{\square}^k = (1+\square)^n \qquad avec\ \square = -x$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k - \underbrace{x^{n+1}}_{k=n+1} = (1+x)^{n+1} - x^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}x^k = \text{On réindexe avec } p = k+1$$

$$= \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}x^{p-1} = x^{-1}\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}x^p = \frac{1}{x}\left[\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^p - \underbrace{1}_{p=0}\right] = \frac{1}{x}\left[(1+x)^n - 1\right]$$

*Remarque : le calcul est valide pour $x \neq 0$.*

*La situation particulière $x = 0$ est facile à traiter*

**Solution de l'exercice 15 (Énoncé)**

1. On a $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k = (1+1)^n = 2^n$.
2. À l'aide d'une disjonction Pair-Impair, on a

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ pair}}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\ impair}}^{n}\binom{n}{k} \quad \text{et} \quad 0 = (1-1)^n = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ pair}}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\ impair}}^{n}\binom{n}{k}$$

Ainsi on trouve $\displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\ pair}}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ impair}}^{n}\binom{n}{k} = 2^{n-1}$

**Solution de l'exercice 18 (Énoncé)**

1. Différence.
2. J'applique l'inégalité avec $1, 2, 3, \dots, n$ ainsi on obtient

$$\begin{gathered}
\ln(2) - \ln(1) \leqslant {}^1/_1 \\
\ln(3) - \ln(2) \leqslant {}^1/_2 \\
\ln(4) - \ln(3) \leqslant {}^1/_3 \\
\dots\dots \\
\ln(n) - \ln(n-1) \leqslant {}^1/_{(n-1)} \\
\ln(n+1) - \ln n \leqslant {}^1/_n
\end{gathered}$$

Puis on somme les inégalités.