# DM 2 : Un peu de calcul.

Consignes pour le DM.

> Une copie pour 2 personnes (les associations se font par ordre alphabétique)
> La première copie est une copie double (qui peut contenir des feuilles simples mais il faut une copie douple)
> La page 1 est obligatoire.

## Calculs plutôt classiques

**Exercice 1.** [Correction] Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$

**Exercice 2.** [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 2 \quad \textit{et} \quad \forall\ \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)} - \frac{1}{(n+1)!}$$

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n!\, u_n + 2$

Calculer $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$.

**Exercice 3.** [Correction] Calculer $\dbinom{2n+2}{n+1}$ en fonction de $\dbinom{2n}{n}$.

En déduire par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dbinom{2n}{n} \geqslant \dfrac{2^{(2n)}}{2n+1}$

**Exercice 4.** [Correction] Encadrement de $n!$.

1. On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$. *Rappel :* $a^{bouge} = e^{b\ln(a)}$
   (a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ de définition et l'ensemble $\mathscr{D}'$ de dérivabilité de $f$.
   (b) Montrer que : $\forall\, x > 0,\ \ln \dfrac{x+1}{x} \geqslant \dfrac{1}{x+1}$
   (c) On admet que : $\dfrac{\ln(1+\square)}{\square} \xrightarrow[\square\to 0]{} 1$.
   Déterminer la limite de $f$ quand $x \to +\infty$.
   (d) Calculer $f'$ puis déterminer le bô tableau de signe/variation de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Application 1. Démontrer que : $\forall\, n \geqslant 1,\quad 2 \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e$
3. Application 2. On considère la suite $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
   (a) Exprimer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de $f$ et de $n$.
   (b) Montrer que : $\forall\, n \geqslant 1,\quad e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant 2\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$. (On pourra (re)lire la correction de la dernière question du DM1)

## Plus difficile ou/et plus technique

**Exercice 5.** [Correction] Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\dots\frac{2n-1}{2n}$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.
2. Exprimer $P_n$ avec uniquement avec des factorielles et une puissance de 2.
   *Indication : Relire le TD 1*
3. En déduire une majoration de $\binom{2n}{n}$.

**Exercice 6.** [Correction] Soient $p, q \geqslant 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soient $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, démontrer que le minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction

$$h : t \longmapsto a^p \frac{t^{-1/q}}{p} + b^q \frac{t^{1/p}}{q} \quad \text{vaut } ab.$$

**Exercice 7.** [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

1. On va montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
   Soit $n, m \in \mathbb{N}$. On considère la proposition
   $$H_{<m>} \ :\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m \leqslant 1 + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2}$$
   Il est clair que $H_{<0>}$ est vrai.
   (a) Montrer que : Si $m \leqslant n-1$ alors $[H_{<m>} \implies H_{<m+1>}]$
   (b) En déduire que : $u_n \leqslant 3$.
2. Attention la question 2.b est délicate. On va montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant x \leqslant y \implies y^{n+1} - x^{n+1} \leqslant (n+1)\, y^n (y - x)$
   (b) En déduire que : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$
   *Indication : On a* $u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$

# Correction.

**Solution de l'exercice 1 (Énoncé)** On fait par récurrence : .....

**Solution de l'exercice 2 (Énoncé)**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+1} = (n+1)!u_{n+1} + 2 = (n+1)!\left(\frac{u_n}{2(n+1)} - \frac{1}{(n+1)!}\right) + 2$$

$$= \frac{(n+1)!}{2(n+1)}u_n - \frac{(n+1)!}{(n+1)!} + 2$$

$$= \frac{1}{2}n!\, u_n + 1$$

$$= \frac{1}{2}\left(n!.u_n + 2\right) = \frac{1}{2}a_n$$

**Solution de l'exercice 3 (Énoncé)** On a

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\frac{(2n)!}{(n)!(n)!} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$$

On fait par récurrence $H < n >$: $\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{(2n)}}{2n+1}$

$>$ Initialisation avec $n = 0$.

C'est clair car $\binom{2.0}{0} = 1$ et $\frac{2^{(2.0)}}{2.0+1} = 1$

Hérédité. On suppose $H < n >$

$$\boxed{\text{On va montrer } H < n+1 >\text{, CàD } \binom{2(n+1)}{n+1} \geqslant \frac{2^{(2(n+1))}}{2n+3} = \frac{2^{2n+2}}{2n+3}}$$

On a

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$$

*On applique* $H < n >$

$$\geqslant \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{2^{(2n)}}{2n+1}$$

$$\geqslant \frac{1}{n+1}2^{2n+1}$$

$$\geqslant \frac{1}{n+1}\frac{2^{2n+2}}{2} = \frac{1}{2n+2}2^{2n+2} \geqslant \frac{1}{2n+3}2^{2n+2} \quad Fini$$

**Solution de l'exercice 4** **(Énoncé)** Encadrement de $n!$.

1. On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

   (a) On peut calculer le nombre $\exp\left(x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$

   Ssi $1 + \dfrac{1}{x}$ se calcule et $1 + \dfrac{1}{x} > 0$

   Signe ?

   $1 + \dfrac{1}{x} > 0 \iff \dfrac{x+1}{x}$ d'où le Bô tableau.

   Ainsi la fonction $f$ est définie sur $\mathscr{D} = ]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$..

   De plus elle est fabriquée avec .........

   Ainsi la fonction $f$ est dérivable sur $\mathscr{D} = ]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

   (b) On étudie sur $]0, +\infty[$, la fonction $h : x \longmapsto \ln \dfrac{x+1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.

   (c) On a "facilement"

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) = \exp \frac{\ln(1 + \square)}{\square} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} e^1 = e.$$

   (d) On a $\forall x \in ]0, +\infty[$

$$f'(x) = \left[\exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)\right]' = \left[1 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \frac{-1}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\right] \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]}_{> 0 \text{ d'après Q1}} \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

   d'où le Bô tableau.

2. D'après le tableau de variation, on a $\forall x \in [1, +\infty[,\ 2 = f(1) \leqslant f(x) \leqslant e$

   On applique cet encadrement avec $x = n \in \mathbb{N}^*$, ainsi $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = f(n) \in [2, e[$

3. On considère la suite $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

   (a) pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = f(n)$$

   (b) Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2 \leqslant \leqslant e$, on a l'encadrement $2 \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant e$

   On a donc $2\, u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant e\, u_n$

$$\text{On a donc } \frac{n^n}{n!} = u_n \leqslant e\, u_{n-1}$$
$$\leqslant e\,(e\, u_{n-2}) = ... = e^{n-1}\, u_1 = e^{n-1}$$

$$\implies \frac{n^n}{n!} \geqslant e^{n-1} \qquad \implies n! \geqslant \frac{n^n}{e^{n-1}} = e\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

   On fait de même avec la minoration.

**Solution de l'exercice 5 (Énoncé)**

1. On fait une récurrence et on termine l'hérédité avec : Final-Inter et quantité conjuguée.
2. On a :

$$\begin{aligned}
&2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n) = 2^n\,n! \\
&1\times 2\times 3\times\cdots\times 2n = (2n)! \\
&\text{Ainsi } 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1) = \frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times 2n}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n\,n!}
\end{aligned}$$

   On a donc $P_n = \dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)} = \dfrac{(2n)!}{2^n\,n!.2^n\,n!} = \dbinom{2n}{n}\times\dfrac{1}{2^{2n}}$

3. On a $\dbinom{2n}{n}\times\dfrac{1}{2^{2n}} = P_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$$\text{ainsi} \binom{2n}{n} \leqslant \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n+1}}$$

**Solution de l'exercice 6 (Énoncé)** La fonction $f$ est dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned}
\forall\, t>0,\ h'(t) = \frac{d}{dt}\left[a^p\,\frac{t^{\frac{-1}{q}}}{p} + b^q\,\frac{t^{\frac{1}{p}}}{q}\right] &= a^p\,\frac{-1}{q}\,\frac{t^{\frac{-1}{q}-1}}{p} + b^q\,\frac{1}{p}\,\frac{t^{\frac{1}{p}-1}}{q} \\
&= \frac{t^{-1}}{pq}\left[-a^p\,\frac{1}{t^{\frac{1}{q}}} + b^q\,t^{\frac{1}{p}}\right] \\
&= \frac{1}{pq\,t}\left[\frac{-a^p + b^q\,t^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}{t^{\frac{1}{q}}}\right] \\
&= \frac{1}{pq\,t}\left[\frac{-a^p + b^q\,t}{t^{\frac{1}{q}}}\right]
\end{aligned}$$

D'où le tableau

| $x$ | $0$ | | $a^p/b^q$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-a^p + b^q\,t$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h$ | $+\infty$ | $\searrow$ | m | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Ainsi le minimum $m$ de de la fonction $h$ vaut

$$\begin{aligned}
m = h\left(\frac{a^p}{b^q}\right) &= a^p\,\frac{\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{\frac{-1}{q}}}{p} + b^q\,\frac{\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{p}}}{q} \\
&= \frac{a^p\,a^{\frac{-p}{q}}\,b^{\frac{q}{q}}}{p} + \frac{a^{\frac{p}{p}}\,b^q\,b^{\frac{-q}{p}}}{q} \\
&\text{Or } p + \frac{-p}{q} = p\left(1 + \frac{-1}{q}\right) = p\frac{1}{p} = 1 \text{ et } q + \frac{-q}{p} = \cdots = 1 \\
&= ab\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = ab
\end{aligned}$$

**Solution de l'exercice 7 (Énoncé)**

1. (a) On suppose $m \leqslant n-1$ et $H_{<m>}$ : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^m \leqslant 1+\dfrac{m}{n}+\dfrac{m^2}{n^2}$

   On a

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^m \left(1+\frac{1}{n}\right) &\leqslant \left(1+\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &\leqslant \left(1+\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}\right)+\left(\frac{1}{n}+\frac{m}{n^2}+\frac{m^2}{n^3}\right)\\ &\leqslant 1+\frac{m+1}{n}+\frac{m^2}{n^2}+\frac{m}{n^2}+\frac{m^2}{n^3}\end{aligned}$$

   Or $\dfrac{(m+1)^2}{n^2}-\left(\dfrac{m^2}{n^2}+\dfrac{m}{n^2}+\dfrac{m^2}{n^3}\right)=\dfrac{m+1}{n^2}-\dfrac{m^2}{n^3}=\dfrac{mn+n-m^2}{n^3}=\dfrac{n(n-m)+n}{n^3}>0$

   Donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{m+1} \leqslant 1+\dfrac{m+1}{n}+\dfrac{(m+1)^2}{n^2}$, CàD $H_{<m+1>}$ est vraie

   (b) Comme $H<0>$ est vrai, on a avec ce qui précède, $H<1>$,$H<2>$,$H<3>$,...,$H<n-1>$,$H<n>$ sont vraies

   Ainsi avec $H<n>$, on a $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant 1+\dfrac{n}{n}+\dfrac{n^2}{n^2}=3$

2. (a) On suppose que $0 \leqslant x \leqslant y$ ainsi on a

$$\begin{aligned}y^{n+1}-x^{n+1} &= (y-x)\left[y^n+y^{n-1}x^1+y^{n-2}x^2+\cdots+y\,x^{n-1}+x^n\right]\\ &\leqslant (y-x)\left[y^n+y^{n-1}y^1+y^{n-2}y^2+\cdots+y\,y^{n-1}+y^n\right]\\ &\leqslant (y-x)\left[(n+1)\,y^n\right]\end{aligned}$$

   (b) On a

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)\\ &= \underbrace{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{A}-\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]}_{B}\\ &\geqslant \underbrace{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\text{Je garde A}}-\underbrace{\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}-1-\frac{1}{n+1}\right)\right]}_{\text{Je majore B avec la question 2.a}}\\ &\geqslant \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\underbrace{\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\text{Calcul et simplification}}\\ &\geqslant \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\text{On factorise et on simplifie}}\geqslant 0\end{aligned}$$

**Conclusion** : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par $3$ donc elle converge vers une limite $\ell \leqslant 3$.
On montera bientôt que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $e \approx 2.7$.