TD 2 Inégalités-Racine.

Jeudi 12 Septembre 2024.

Révision : Pair-Impair

Exercice 1. [Correction] On sait que : $1+2+3+\cdots+\square = \dfrac{\square(\square+1)}{2}$

On considère $P_n = 2+4+\cdots+(2n)$ et $I_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)$

Calculer P_n puis $P_n + I_n$ et enfin I_n.

Exercice 2. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère

$P_n =$ Le produit des entiers pairs de 2 à $2n = 2.4.6....(2n-2)(2n)$

ET

$I_n =$ Le produit des entiers impairs de 1 à $(2n+1) = 1.3.5....(2n+1)$

Calculer (à l'aide, entre autre, de factoriel) P_n puis $P_n \times I_n$ et enfin I_n.

Inégalités

Exercice 3.

1. Encadrer *rapidement* puis plus finement sur $[-1,1]$ l'expression $x^2 - x + 1$.
2. Encadrer *rapidement* puis plus finement sur $[-1,1]$ l'expression $\dfrac{x+2}{x^2+1}$.

Exercice 4. Majorer $h(t)$ sur $[0,1]$

(1) $h(t) = e^{-2t}$

(2) $h(t) = \dfrac{\sqrt{2-t}}{3-t}$

(3) $h(t) = t\ln(1+t)$

(4) $h(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$

(5) $h(t) = \sin(t^2)$

(6) $h(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$

Exercice 5. [Correction] Montrer que : $\forall\, x \in [1,2]\,,\quad \dfrac{x}{\sqrt{2x-1}} \leqslant \sqrt{2}$

Exercice 6. [Correction] Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}x$

Exercice 7. [Correction] Montrer (en cheminant) que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

Autour des Racines

Exercice 8. [Correction] Soit le trinôme $T(X) = X^2 + Xy + 5X - 2y^2 + y + 6$.

Justifier que $-2y-3$ est une racine du trinôme T puis finir la factorisation.

En déduire la nature géométrique de l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant l'équation

$$x^2 + xy + 5x - 2y^2 + y + 6 = 0$$

Suite récurrente

Exercice 9. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1/2$

$$\text{et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2\,u_n}{1+u_n^2}$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. *Bonus* Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ à préciser.

Exercice 10. Soit la suite (x_n) définie

$$\text{par } x_0 = 4 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{2\,(x_n)^2 - 3}{x_n + 2}$$

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant 3$.
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - 3 \geqslant \dfrac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite (x_n) est-elle convergente ?

Exercice 11. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$

$$\text{et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) = f\,(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est croissante sur $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$

   et que la fonction f est $1/2$ -lipschitzienne sur $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$.
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (a) Méthode 1. En montrant, *sans récurrence*, que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$
   (b) Méthode 2. En montrant, *par récurrence*, que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ℓ. Sachant que $f(\ell) = \ell$ déterminer ℓ
5. Étude de $|u_n - \ell|$, la distance entre u_n et ℓ
   (a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \ell|$.
   (b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

> $P_n = 2+4+\cdots+(2n) = 2\Big[1+2+3+\cdots+n\Big] = 2\dfrac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$

> $P_n + I_n = 1+2+3+\cdots+(2n+1) = \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{2} = (2n+1)(n+1)$

> $I_n = P_n + I_n - P_n = (2n+1)(n+1) - n(n+1) = (n+1)\left[(2n+1)-n\right] = (n+1)^2.$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On a

$$\begin{aligned}
P_n &= 2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n-2)\times(2n)\\
&= \underbrace{(2.1)}\,\underbrace{(2.2)}\cdots\underbrace{(2(n-1))}\,\underbrace{(2n)}\\
&= \underbrace{2.2...2}_{n\ fois}\ 1.2.3....n\\
&= 2^n\, n!
\end{aligned}$$

2. On a $I_n = 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1)$, ainsi

$$\begin{aligned}
I_n\times P_n &= (1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1))\,.\,(2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n-2)\times(2n))\\
&= 1.2.3....(2n-1)(2n)(2n+1)\\
&= \textbf{\textit{Le produit de tous les entiers de 1 à (2n+1)}}\\
&= (2n+1)!
\end{aligned}$$

3. On a $I_n\times P_n = (2n+1)!$

$$\text{Conclusion : } I_n = \frac{(2n+1)!}{P_n} = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) Direct + quantité conjuguée.

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On y va direct

$$\forall x>0,\quad 1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x} = \frac{(...)^2-(...)^2}{1+\frac{1}{2}x+\sqrt{1+x}} = \frac{{}^1\!/_4\ x^2}{....>0} \geqslant 0$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé) $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(...)^2-(...)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé) Soit le trinôme $T(X) = X^2+Xy+5X-2y^2+y+6$.

> Comme $T(-2y-3) = \cdots = 0$, le nombre $-2y-3$ est une racine du trinôme T ;

> Comme $r = -2y-3$ est une racine de T, on sait que $(X-r) = X+2y+3$ se factorise

En effet, on a $X^2+Xy+5X-2y^2+y+6 = (X+2y+3)(X-y+2)$

> Soit $M(x,y)$ un point du plan, on a

$$\begin{aligned}
x^2+xy+5x-2y^2+y+6=0 &\iff (x+2y+3)(x-y+2)=0\\
&\iff \underbrace{x+2y+3=0}_{\textit{C'est l'eq d'une droite}}\quad ou\quad \underbrace{x-y+2=0}_{\textit{C'est l'eq d'une droite}}
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble rechercher est la réunion des 2 droites.