

Exercice 1. [Correction]

1. Logique. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition : $(n^3 \text{ est pair}) \implies (n \text{ est pair})$

(a) Énoncer la réciproque, la contraposée et la négation.

(b) Démontrer que la proposition : $(n^3 \text{ est pair}) \implies (n \text{ est pair})$ est vraie

2. Écrire avec les quantificateurs les propriétés suivantes

> La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 2.

> La fonction f est majorée sur $\mathbb{R}$.

> La fonction f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $a \in [-1, 1]$. Le nombre $\arcsin(a)$ est définie par

$$\arcsin(a) = \left| \begin{array}{l} \text{L'unique solution dans } [-\pi/2, \pi/2] \\ \text{De l'équation } \sin(X) = a \end{array} \right.$$

Donner les propriétés "évidentes" de $\arcsin(a)$.

Exercice 2. Calculer les dérivées des expressions suivantes (Ne pas chercher à déterminer $\mathcal{D}$, c'est un exercice technique de calcul de dérivée)

$$\begin{array}{l} > \ln(1-2x) \\ > \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} > e^{-1/x^2} \\ > \arctan(\sqrt{1+x^2}) \\ \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right. \quad \text{On admet : } \arctan'(t) =$$

Exercice 3. [Correction] Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) = \ln\left(\frac{3(n+1)}{n+3}\right)$ **Exercice 4.** [Correction] On considère la suite (I_n) vérifiant

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$$

$$\text{Montrer que : } \forall n \in \mathbb{N}, I_n = \binom{2n}{n} \frac{\pi}{2^{2n+1}}$$

Exercice 5. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+1}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq n^2$.

Exercice 6. [Correction] On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

1. Calculer et simplifier $a_{n+1} - a_n$.

2. Calculer et simplifier $b_{n+1} - b_n$.

3. En déduire (par récurrence) que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = b_n$

Exercice 7. [Correction]

1. Montrer que : $\forall x > 1, 2 \frac{x-1}{x+1} \leq \ln(x)$

$$\text{En déduire que : } \forall a, b \text{ avec } 0 < a < b, \frac{2}{a+b} \leq \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a}$$

2. Montrer que : $\forall x > 1, \ln(x) \leq \frac{1}{2} \frac{x^2 - 1}{x}$

$$\text{En déduire que : } \forall a, b \text{ avec } 0 < a < b, \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} \leq \frac{a+b}{2ab}$$

Exercice 8. [Correction] Soit $n \geq 2$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$

Le but de l'exercice est de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique, CàD

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Kulture : $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, c'est la moyenne géométrique et $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$, c'est la moyenne arithmétique.

1. Montrer que : $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$
2. On note $M = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ la moyenne arithmétique de $x_1, \dots, x_n$. Calculer $\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{M} - 1 \right)$
3. À l'aide des questions précédentes, montrer l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 9. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq a \leq b$

Montrer, à l'aide d'une étude de fonction, que : $b^n - a^n \leq n b^{n-1} (b - a)$

Exercice 10. On admet que

$f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f , CàD la dérivée de la dérivée de la dérivée de la
et on a $f^{(n+1)} = [f^{(n)}]'$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, [\sqrt{x}]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)! 2^{2n-1} x^{n-1} \sqrt{x}}$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. OK

2. Soit n un entier.On suppose que n est impair, ainsi on peut écrire $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{Z}$.On va montrer que : n^3 est impairOn a $n^3 = (2p+1)^3 = \dots = 1 + 2\Box$ avec $\Box = \dots \in \mathbb{Z}$. fini.

3. Par définition

$$\arcsin(a) = \begin{cases} \text{L'unique solution dans } [-\pi/2, \pi/2] \\ \text{De l'équation } \sin(X) = a \end{cases}$$

Ainsi on a

> $\arcsin(a) \in [-\pi/2, \pi/2]$, CàD $-\pi/2 \leq \arcsin(a) \leq \pi/2$ > $\arcsin(a)$ est une sol de l'équation, CàD $\sin(\arcsin(a)) = a$

4. À méditer

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)On va montrer par récurrence $H_{<n>}$: $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) = \ln\left(\frac{3(n+1)}{n+3}\right)$ > Initialisation avec $n=1$.

$$\text{On a } \sum_{k=1}^1 \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{1(1+3)}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{et } \ln\left(\frac{3(1+1)}{1+3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \text{ donc } H_{<1>} \text{ est vraie}$$

> Hérité

On suppose $H_{<n>}$

$$\text{On va montrer } H_{<n+1>}, \text{ CàD } \sum_{k=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) = \ln\left(\frac{3((n+1)+1)}{(n+1)+3}\right) = \ln\left(\frac{3(n+2)}{n+4}\right)$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{(n+1)(n+4)}\right)$$

On applique $H_{<n>}$

$$= \ln\left(\frac{3(n+1)}{n+3}\right) + \ln\left(\frac{(n+1)(n+4)+2}{(n+1)(n+4)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3(n+1)}{n+3}\right) + \ln\left(\frac{n^2+5n+6}{(n+1)(n+4)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3(n+1)}{n+3} \cdot \frac{n^2+5n+6}{(n+1)(n+4)}\right)$$

Or on a $n^2+5n+6 = (n+3)(n+2)$, ainsi

$$= \ln\left(\frac{3(n+1)}{n+3} \cdot \frac{(n+3)(n+2)}{(n+1)(n+4)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3(n+2)}{n+4}\right) \quad \text{Fini.}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

On va montrer par récurrence $H_{<n>}$: $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$

> Initialisation.

On a $\frac{(2 \times 0)!}{2^0(0!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ donc $H_{<0>}$ est vraie

> Hérédité.

On suppose $H_{<n>}$

On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $I_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$

On chemine

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2n+1}{2n+2} I_n = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+2)} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2 \cdot 2(n+1)(n+1)2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2(n+1))!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{Fini.} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) On fait par récurrence (à 2 étages)

$$H_{<n>} : u_n \leq n^2$$

> Initialisation avec $n=1$ et $n=2$

On a $u_1 = 1 \leq 1^2$ et $u_2 = u_1 + \frac{a_0}{0+1} = 2 \leq 2^2$ OK

> Hérédité. On suppose $H_{<n>}$ et $H_{<n+1>}$

On va montrer $H_{<n+2>}$

$$\text{CàD } u_{n+2} \leq (n+2)^2$$

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{n+2} &= u_{n+1} + \frac{a_n}{n+1} \leq (n+1)^2 + \frac{n^2}{n+1} \\ &\leq (n^2 + 2n + 1) + \frac{n^2}{n+1} \\ &\leq n^2 + 3n + 1 \leq n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 \quad \text{Fini} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. On a

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
 &= \frac{1}{\underbrace{2n+1}_{k=2n+1}} + \frac{-1}{\underbrace{2n+2}_{k=2n+1}} \\
 &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}
 \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - b_n &= \sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\
 &= \frac{-1}{\underbrace{n+1}_{k=n+1}} + \sum_{k=n+2}^{2n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{\underbrace{2n+1}_{k=2n+1}} + \frac{1}{\underbrace{2n+2}_{k=2n+2}} \\
 &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}
 \end{aligned}$$

3. La récurrence est facile car $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} - a_n = b_{n+1} - b_n$ **Solution de l'exercice 7 (Énoncé)**1. On étudie la fonction : $h : x \mapsto \ln(x) - 2 \frac{x-1}{x+1}$ Pour tout $\forall a, b$ avec $0 < a < b$, on a

$$\frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \times \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

On applique l'inégalité avec $x = b/a > 1$ car $0 < a < b$

$$\geq \frac{1}{b-a} 2 \frac{\left(b/a\right) - 1}{\left(b/a\right) + 1} = \dots = \frac{2}{a+b}$$

2. On étudie la fonction : $h : x \mapsto \frac{1}{2} \frac{x^2 - 1}{x} - \ln(x)$ Pour tout $\forall a, b$ avec $0 < a < b$, on a

$$\frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \times \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

On applique l'inégalité avec $x = b/a > 1$ car $0 < a < b$

$$\leq \frac{1}{b-a} \frac{1}{2} \frac{\left(b/a\right)^2 - 1}{b/a} = \dots = \frac{a+b}{2ab}$$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

1. On étudie la fonction $h : x \mapsto (x-1) - \ln(x)$
2. On note M la moyenne arithmétique de $x_1, \dots, x_n$.

On a

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{M} - 1 \right) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n 1 = \frac{1}{M} nM - n = 0$$

3. On applique Q1 avec $\frac{x_k}{M} - 1$, puis on somme de $k=1$ à $k=n$, ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{x_k}{M}\right) &\leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{M} - 1\right) = 0 \\ &\Rightarrow \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{x_k}{M}\right) \leq 0 \\ &\Rightarrow \frac{\prod_{k=1}^n x_k}{M^n} \leq 1 \\ &\Rightarrow \prod_{k=1}^n x_k \leq M^n \\ &\Rightarrow \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq M \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $b \in \mathbb{R}_+$, on étudie, sur $[0, b]$, la fonction $h : x \mapsto [nb^{n-1}(b-x)] - [b^n - x^n]$

> La fonction h est dérivable sur $[0, b]$.

> $\forall x \in [0, b], h'(x) = -nb^{n-1} + nx^{n-1} = n[x^{n-1} - b^{n-1}]$

Comme $x \in [0, b]$ et $n-1 \geq 0$, on sait que $[x^{n-1} - b^{n-1}] \leq 0$

> D'où le bô tableau

x	0	b
$\text{sgn } h'$	-	
h		

Conclusion : $\forall x \in [0, b], b^n - x^n \leq nb^{n-1}(b-x)$ Fini.