Les Sommes

1 Les complexes.

1.1 Le nombre i.

Définition 1. le nombre i
Le nombre i est l'unique solution dans ....
de l'équation $X^2 = -1$.

Un autre points de vue

Après des siècles de vaines recherches, les "anciens" ont admis/accepté que

l'équation $X^2 = -1$ n'a pas de Solution/Racine dans $\mathbb{R}$

Puis des esprits ingénieux ont eu l'idée d'introduire un nombre "imaginaire", noté $\sqrt{-1}$ vérifiant $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$.

Après quelles manipulations, on s'est rendu compte que la notation $\sqrt{-1}$ pouvait aboutir à des contradictions

Par exemple : $\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$

$\Longrightarrow \left(\sqrt{-1}\right)^2 = 1$ OUPS

Les contradictions viennent de la notation $\sqrt{-1}$ et de la formule $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Conclusion : On a remplacé la notation $\sqrt{-1}$ par i, CàD $\sqrt{-1} = i$ et depuis tout va bien.

Définition 2. Le nombre i, imaginaire

Il existe un nombre, noté i, tel que $i^2 = -1$

Le nombre i n'est pas un nombre réel, c'est un nombre "imaginaire"

mais il suit les mêmes règles de calculs que les autres nombres

Ainsi on a $i^2 = -1$ et aussi

$i^3 = i^{2+1} = i^2.i = -i$

$i^4 = i^{3+1} = i^3.i = (-i).i = -i^2 = 1(-1) = 1$

$i^4 = i^{2+2} = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$

...etc....$i^5 = i,\ i^6 = -1, ...$

Bonus : l'équation $X^2 = -1$ admet exactement 2 solution $X = i$ et $X = -i$.

1.2 Les complexes.

Définition 3. Les nombre $z = a + ib$

On peut "mélanger" les nombres réelles avec le complexe i

ainsi on obtient les nombres complexes $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

`La forme a+ib est la forme cartésienne ou algébrique d'un complexe.`

Par exemples : $2+3i,\quad -3+5i,\quad \frac{1}{2} - i,\quad 3 = 3 + 0i,\quad 2i\pi = i(2\pi) = 0 + (2\pi)i$

Théorème. *Opérations avec les complexes*

L'addition/soustraction, produit/Quotient, puissance d'un complexe

est encore un complexe

Vocabulaire.

Les nombres $a = a + 0i$ sont les nombres réels "classiques".

Les nombres $ib = 0 + ib$ sont les nombres imaginaires purs.

Les nombres $a + ib$ sont les nombres complexes.

Partie réel, partie imaginaire

Soit $z = a + ib$ un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.

> Le réel a est la partie réelle du complexe z, notée $\mathrm{Re}(z)$.

> Le réel b est la partie imaginaire du complexe z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Théorème. Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

> **Unicité.** La forme cartésienne est unique.

$$a + ib = c + id \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

> **Caractérisation.**

$$z = a + ib \in \mathbb{R} \iff b = \mathrm{Im}(z) = 0.$$

$$z = a + ib \in i\mathbb{R} \iff a = \mathrm{Re}(z) = 0$$

> **Formulaire.**

$$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$$

$$\mathrm{Re}(2z - 3z') = 2\mathrm{Re}(z) - 3\mathrm{Re}(z')$$

Attention : $\mathrm{Re}(z.z') \neq \mathrm{Re}(z).\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Re}(z^n) \neq \left(\mathrm{Re}(z)\right)^n$

On a de même pour la partie imaginaire Im

2 Conjugué, Module, Quotient.

2.1 Conjugué.

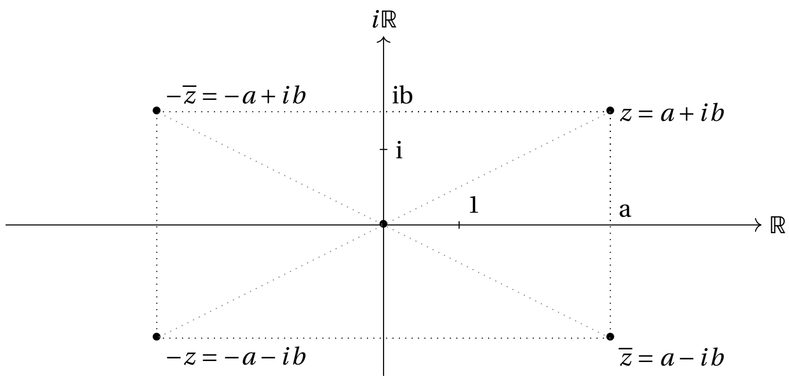
Définition 4. Conjugué

Soit $z = a + ib$ un complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle conjugué de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe défini par :

$$\overline{z} = \overline{a+ib} \overset{def}{=} a - ib$$

$\boxed{\text{Exemples : } \overline{2} = \overline{2+i0} = 2, \quad \overline{i} = \overline{0+1i} = -i, \quad \overline{-2+3i} = -2-3i}$



On a la remarquable propriétés :

$$z.\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = (a)^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$$

Théorème 5. Formulaire

Soit $z = a + ib$, $z' = a - ib$ des complexes

> Géométrie.

$\overline{z}$ c'est le symétrique de z par rapport à l'axe $\mathbb{R}$.

$z \in \mathbb{R} \iff z$ est un réel $\iff b = \text{Im}(z) = 0 \iff \overline{z} = z$

$z \in i\mathbb{R} \iff z$ est un imaginaire pur $\iff a = \text{Re}(z) = 0 \iff \overline{z} = -z$

> Facile.

Comme $z = a + ib$ et $\overline{z} = a - ib$, on a

$$a = \text{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad Et \quad b = \text{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

Formulaire.

$\overline{\overline{z}} = ...$ $\quad \overline{2z-3z'} = ...$ $\quad \overline{z.z'} = ...$ et $\quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = ...$

Moralité : La conjugaison, c'est comme la misère

$$\overline{\frac{z-i}{iz-1}} =$$

Démonstration : La démonstration la plus simple est la meilleure,

CàD on note que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

> $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{(a+ib)+(a-ib)}{2} = a = \mathrm{Re}(z)$

> $\overline{\overline{z}} = \overline{a-ib} = \overline{a+(-b)i} = a-(-b)i = a+ib = z$

> Addition.

D'une part : $\overline{z+z'} = \overline{(a+ib)+(a'+ib')} = \overline{(a+a')+i(b+b')} = (a+a')-i(b+b')$

D'autre part : $\overline{z}+\overline{z'} = (a-ib)+(a'-ib') = (a+a')-i(b+b')$

Donc on a bien $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$

> Produit.

D'une part : $\overline{zz'} = \overline{(a+ib)(a'+ib')} = \cdots$

D'autre part : $\overline{z}.\overline{z'} = \overline{a+ib}.\overline{a'+ib'} = \cdots$

Donc on a bien $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$

> Quotient. On le fera quand on aura défini le quotient de deux complexes

2.2 Module.

Définition 6. Module d'un complexe

Soit $z = a + ib$ un complexe donné sous forme algébrique.

le module de z, noté $|z|$, est le réel

$$|z| \overset{def}{=} \sqrt{a^2+b^2}$$

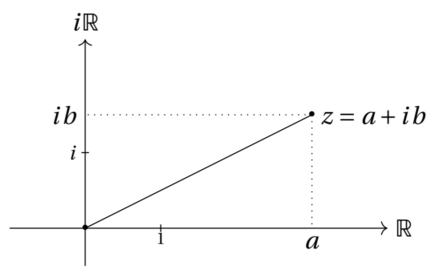
$= $ La longueur entre 0 et z

Exemples :

$|-1| = 1$

$|i| = 1$

$|2-i| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$



Géométrie.

$|z| =$ la distance entre z et 0.

Ainsi $|z|$ est réel positif et $|z| = 0 \iff z = 0$

Plus généralement

La distance entre le point A d'affixe z et A' d'affixe z'
est égale à $|z-z'| = |z'-z|$

Théorème 7. formulaire pour le module
Soit z un complexe.

$$\boxed{\textbf{L'indispensable } |z|^2 = z.\overline{z} \text{ et } |z| = \sqrt{z.\overline{z}}}$$

> **Classique.**

- $|z.z'| = |z|.|z'|$ et Lorsque $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- Lorsque $n \in \mathbb{N}$ alors $\left|z^n\right| = |z|^n$.
- $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$

> **Distance.** La distance entre z et z' est égale à $|z-z'| = |z'-z|$

Application $|z| = |z-0|$ = la distance entre z et 0.
Ainsi $|z|$ est réel positif et $|z| = 0 \iff z = 0$

> **L'inégalité triangulaire.**

$$|z+z'| \leqslant |z| + |z'| \quad \textit{et} \quad |2z - 3z'| \leqslant 2|z| + 3|z'|$$

De plus il y a égalité, CàD $|z+z'| = |z| + |z'|$
Ssi z et z' sont sur la même demi-droite issue de 0
Ssi il existe $k \geqslant 0$ tel que $z' = kz$ Si $z \neq 0$

Démonstration : Le plus simple est le mieux.
Comme $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire $z = a + ib$ ainsi

> Démonstration de $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$.

On a $-z = -a - ib$, $\overline{z} = a - ib$ et $-\overline{z} = -a + ib$, on a

$$|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

et idem pour les autres.

> Démonstration de $|z.z'| = |z|.|z'|$

On va calculer $|z.z'|^2$ avec les conjugués $|z.z'|^2 = z.z'\overline{z.z'} = z.z'.\overline{z}.\overline{z'} = z.\overline{z}.z'.\overline{z'} = |z|^2.|z'|^2$
Comme $|\square| = \sqrt{|\square|^2}$, c'est fini.

> > Démonstration de $|z^n| = |z|^n$

On fait une récurrence.

2.3 Quotient.

Définition 8.
Soit $z = a + ib$ un complexe.

$$\textit{Pour calculer } \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib},$$
$$\textit{il faut multiplier par le conjugué} \quad \overline{z} = a - ib$$

Rappel : $(a+ib)(a-ib) = (a)^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$ ou bien $z\overline{z} = |z|^2$

Formulaire. Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

> **Calcul.**

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \times \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

> **Quotient et conjugué.**

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \text{ et plus généralement } \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

Moralité : La conjugaison se diffuse vraiment partout!!!!!

Application : soit a, b, c, d des réels ainsi $\overline{a} = a$,....

$$\overline{\left(\frac{az+b}{cz'+d}\right)} = \textit{La conjugaison se diffuse} = \frac{\overline{a}\,\overline{z} + \overline{b}}{\overline{c}\,\overline{z'} + \overline{d}} = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z'}+d}$$

> **Quotient et module.**

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \text{ et } \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Démonstration :

> Conjugué.

D'une part : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a+ib}\right)} = \overline{\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right)} = \overline{\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}$

D'autre part : $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a-ib} = \cdots$

Donc on a bien $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

> Produit :

On a $\left|\frac{z}{z'}\right|^2 = \left(\frac{z}{z'}\right) \cdot \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{z}{z'} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} = \frac{z.\overline{z}}{z'.\overline{z'}} = \frac{|z|^2}{|z'|^2}$

Comme $|\square| = \sqrt{|\square|^2}$, c'est fini.

3 Exercices

Calculs avec des complexes

Exercice 1. Applications

1. À quoi est égal i^7
   ☐ 1 ☐ i ☐ $-i$ ☐ -1
2. À quoi est égal $(1-2i)(-1+3i)$
   ☐ $5+5i$ ☐ $-7+5i$ ☐ $-5-5i$ ☐ $-7-5i$
3. À quoi est égal $(1+i)^3$
   ☐ $2+2i$ ☐ $-2+2i$ ☐ $2-2i$ ☐ $-2-2i$
4. À quoi est égal $2(-i+1)(-2i)(-i-1)(i-1)$
   ☐ $16i$ ☐ $-16i$ ☐ 16 ☐ -16
5. À quoi est égal $Z=\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$
   ☐ $2\sqrt{2}$ ☐ $2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}$ ☐ $2+\sqrt{2}+i(2-\sqrt{2})$ ☐ $2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$
6. Quel est le(s) nombre(s) qui élevé au carré, vaut i ?
   ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ ☐ $-\dfrac{i}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$

Exercice 2. Calculer $(1-i)^3$, $(-2+3i)^4$, $(2+i)^5$

Exercice 3. À quoi est égal $\overline{i(z-1)}$
☐ $i.\overline{z}-i$ ☐ $i.\overline{z}+i$ ☐ $-i.\overline{z}+i$ ☐ $-i.\overline{z}-i$

Exercice 4.

1. Calculer $|-2|$, $|3i|$, $|-1+i|$, $\left|\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|$, $\left|(1+i)^3\right|$
2. Soit z un complexe non nul. Calculer $\left|\dfrac{z}{|z|}\right|$

Exercice 5. Soit A un point d'affixe z.

1. Identifier la figure définie par $|z+i|\leqslant 2$.
   ☐ le disque de centre $A(i)$ et de rayon 2 ☐ le disque de centre $A(-i)$ et de rayon 2
   ☐ le disque de centre $A(i)$ et de rayon $\sqrt{2}$ ☐ le disque de centre $A(-i)$ et de rayon $\sqrt{2}$
2. Reconnaitre la figure définie par $|2z-3|=5$.

Exercice 6.

1. Mettre les complexes sous forme algébrique $\dfrac{1}{2+3i}$, $\dfrac{2-i}{1+2i}$
2. Quel est le module de $\dfrac{1}{-3+4i}$
   ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ☐ $\dfrac{1}{5}$ ☐ $\dfrac{1}{25}$
3. On suppose que $|z|=1$. À quoi est égale $\dfrac{1}{z}$
   ☐ $\dfrac{1}{\overline{z}}$ ☐ $-z$ ☐ $-\overline{z}$ ☐ $\overline{z}$

Exercice 7. On considère $z_1 = \dfrac{4-i}{3+2i}$ et $z_2 = \dfrac{4+i}{3-2i}$

Vérifier que $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$ et $z_1 - z_2 \in i\mathbb{R}$

Exercice 8. [Correction] Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\left|\dfrac{2}{1+it} - 1\right|$
2. Géométriquement où se trouve le point M d'affixe $\dfrac{2}{1+it}$

Exercice 9. [Correction] Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc = 1$ et et $cz + d \neq 0$

$$\text{Montrer que } \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

Exercice 10. [Correction] En utilisant $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ ou $|z|^2 = z\overline{z}$

1. Soit $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que : $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right)$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$. Montrer que $|1+iz|^2 + |z+i|^2 = 4$
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$ et $|a| = 1$.

   Montrer que : $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1$

Exercice 11. [Correction] Soit u un complexe avec $u \neq 1$. Soit z un complexe avec $z \notin \mathbb{R}$.

$$\text{On veut montrer : } \frac{z-u\overline{z}}{1-u} = A \in \mathbb{R} \iff |u| = 1$$

$\Longleftarrow$ Calculer $\overline{A} - A$. Conclure.

$\Longrightarrow$ On suppose que $A \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{On doit montrer } |u| = 1, \text{ CàD } u\overline{u} = ... = 1.}$$

Étape 1 : On isole u. Étape 2 : On calcule $u\overline{u}$.

Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C} - \{2i\}$ par

$$f : z \longmapsto f(z) = \frac{z+1}{z-2i}$$

1. On suppose que $z = x + iy$, calculer $\operatorname{Re}\big(f(z)\big)$. Déterminer les complexes $z \neq 2i$ tel que $\operatorname{Re}\big(f(z)\big) = 0$
2. On suppose que $z = x + iy$, calculer $\big|f(z)\big|^2$. Déterminer les complexes $z \neq 2i$ tel que $\big|f(z)\big|^2 = 1$

Exercice 13. [Correction] Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

On considère la fonction f qui, à z associe le complexe $z' = f(z) = \dfrac{z^2 - 2i}{z\overline{z} + 1}$

1. Justifier que le nombre $f(z)$ est bien définie, CàD on ne divise jamais par 0.
2. Montrer que $z' = f(z) \in \mathbb{R} \iff z^2 - \overline{z}^2 = 4i$ Rappel $z' \in \mathbb{R} \iff \overline{z'} = z'$.
3. En déduire que : $z' = f(z) \in \mathbb{R}$ Ssi on peut écrire $z = x + i\dfrac{1}{x}$ avec $x \in \mathbb{R}$
4. Montrer (en suivant la même démarche) que : $z' = f(z) \in i\mathbb{R}$ Ssi on peut écrire $z = x + ix$ ou $z = x - ix$.

4 Les complexes $e^{i\theta}$

4.1 Définition.

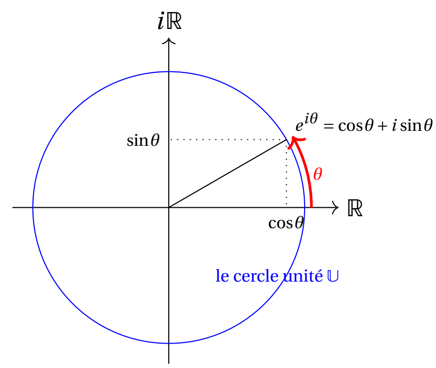
Notation : L'ensemble des complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.

Ainsi on a : $z \in \mathbb{U} \iff |z| = 1$

Définition 9.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

Le complexe $\cos\theta + i\sin\theta$ est noté $e^{i\theta}$.

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} \overset{\text{def}}{=} \cos\theta + i\sin\theta$$



À connaitre

$$\boxed{1 = e^{i0}, \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -1 = e^{i\pi}, \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

Ces formules sont "évidentes" dès que l'on pense à placer les points sur le cercle unité.

Attention l'angle est en radian, CàD avec π

Théorème 10.

Thm Moivre : Le formulaire sur les puissances s'applique aussi avec les $e^{i\alpha}$.

Propriétés "évidentes".

$$\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

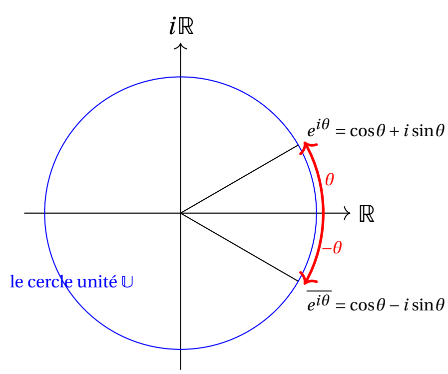
$$\text{et} \quad |e^{i\theta}| = 1 \qquad \text{car } \cos^2 + \sin^2 = 1$$

Propriétés "puissances".

$$e^{i\alpha}.e^{i\beta} = e^{i\alpha + i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{1}{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha} \text{ et } \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$$

$$e^{i2\alpha} = \left(e^{i\alpha}\right)^2 \text{ et } e^{i3\alpha} = \left(e^{i\alpha}\right)^3$$



Factorisation par l'argument moitié.

Quand on rencontre les complexes $1 + e^{i\theta}$, on doit penser à factoriser l'argument moitié

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left[e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right]$$

$$= e^{i\theta/2}\left[\underbrace{(C - iS) + (C + iS)}_{2\cos(\theta/2)}\right] = \underbrace{e^{i\theta/2}}_{\text{Ici c'est l'angle}} \quad \underbrace{2\cos(\theta/2)}_{\text{Ici c'est le module}}$$

Ce calcul s'adapte à $1 - e^{i\theta}$ et à $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$

4.2 Module-Argument.

Théorème 11. Module et argument d'un complexe

> Soit z un complexe avec $|z| = 1$

Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$ Attention : θ n'est pas unique.

Application : Quand on rencontre A un complexe avec $|A| = 1$,
Alors on peut écrire $A = e^{i\theta}$
Ainsi on remplace A par $e^{i\theta}$ et l'on poursuit les calculs.

> Soit z un complexe $z \neq 0$

Alors il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = r\, e^{i\theta}$
c'est la forme trigonométrique ou circulaire de z.

De plus
- le réel r est unique car $r = |z|$.
- Mais le réel θ, appelé **UN** argument de z n'est pas unique, on le note $\arg(z)$.

En revanche il existe un et un seul argument de z dans $]-\pi, \pi]$
c'est L'argument principal de z et on le note $Arg(z)$

Théorème 12. Non-unicité

> On a $0 \neq 2\pi$ et pourtant $e^{i0} = e^{i2\pi}$, CàD $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \not\Rightarrow \theta = \theta'$

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \ mod\ [2\pi]$$

> Plus généralement $z = z' \iff r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \mod [2\pi] \end{cases}$

Définition 13. Argument Principal d'un complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$.

On appelle argument de z tout réel θ tel que $z = r\, e^{i\theta}$.

Lorsque $z \neq 0$, et possède θ comme argument, alors les arguments de z sont exactement les éléments de $\theta + k(2\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

CàD les arguments de z sont congrus modulo 2π .

Lorsque $z \neq 0$, il possède un unique argument dans $]-\pi, \pi]$, que l'on appelle argument principal de z, et qu'on note $Arg(z)$.

4.3 Calculer $e^z = e^{a+ib}$

Définition 14. Calculer $e^z = e^{a+ib}$

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
On définit le nombre complexe $e^z = e^{a+ib}$ par la formule

$$e^z = e^{a+ib} \overset{def}{=} e^a.e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Ainsi $\mathrm{Re}(e^{a+ib}) = e^a \cos b$ et $\mathrm{Im}(e^{a+ib}) = e^a \sin b$

Le formulaire classique des nombres exp est encore valide avec les exponentielles complexes.

Démonstration : $e^z.e^{z'} = e^{a+ib}.e^{a'+ib'} = e^a e^{ib}.e^{a'} e^{ib'} = e^{a+a'}.e^{i(b+b')} = e^{(a+a')+i(b+b')} = e^{z+z'}$

5 Applications

5.1 Introduction à la trigonométrie

Théorème 15. Formule de Moivre-Euler
On a les formules suivantes

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$
$$e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$$

Ainsi que

$$\cos(\alpha) = \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha}\right) = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$$
$$\sin(\alpha) = \mathrm{Im}\left(e^{i\alpha}\right) = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$$

Grâce à ces formules et formulaire sur les puissances, on fabrique plein de "formule trigo".

- $\cos(2x) = \mathrm{Re}\left(e^{i2x}\right) = \mathrm{Re}\left(\left[e^{ix}\right]^2\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\cos(x)+i\sin(x)\right]^2\right) = \mathrm{Re}\left(\text{À développer}\right)$.

  de même pour $\cos(3x)$ ou $\sin(2x) = \mathrm{Im}\left(e^{i2x}\right)$

- $\cos^2(a) = \left[\cos(a)\right]^2 = \left[\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\right]^2 =$ On développe et on regroupe.

- $\cos(a)\cos(b) = \left[\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\right]\left[\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}\right] =$ On développe et on regroupe.

5.2 Un peu de géométrie

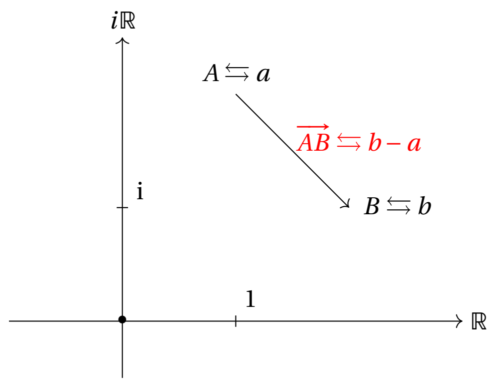
On munit le plan du repère orthonormée classique $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Définition 16. Correspondance : Point ⇆ Vecteur ⇆ Complexe

$$\begin{pmatrix} \text{Le point } M : (a,b) \\ \\ \text{de coordonnées } (a,b) \end{pmatrix} \leftrightarrows \begin{pmatrix} \text{Le vecteur } \overrightarrow{OM} = (a,b) \\ \\ \text{avec } \overrightarrow{OM} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} \end{pmatrix} \leftrightarrows \begin{pmatrix} \text{Le complexe } z \\ \\ \text{avec } z = a + bi \end{pmatrix}$$

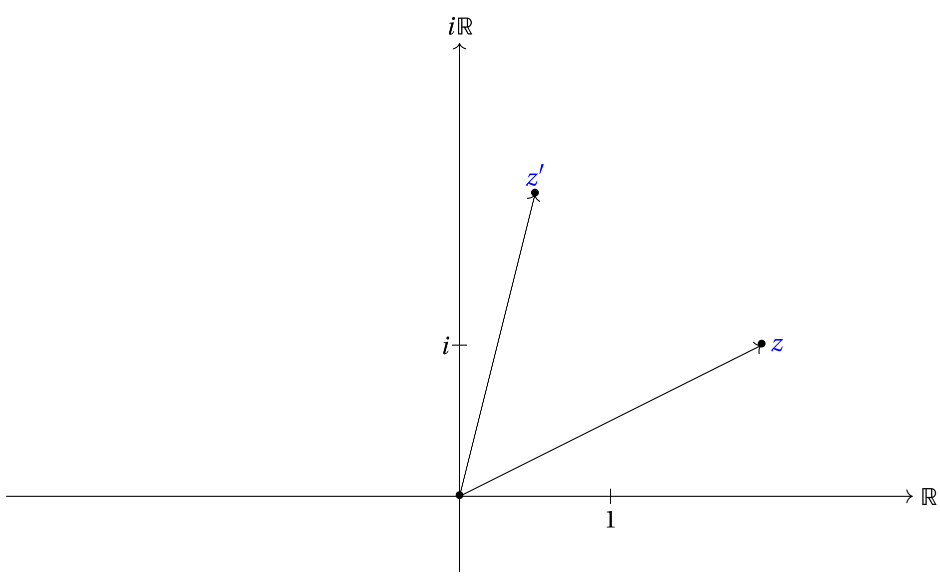
On dit que : le complexe $z = a + ib$ est l'affixe du point $M : (a,b)$
ou bien que : le complexe $z = a + ib$ est l'affixe du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = (a,b)$

Affixe d'un vecteur : Soit A, B deux points d'affixe a, b alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$



Addition, Produit

Soit les complexes z et z'. Comment on construit : $z + z'$, $z - z'$ et $z.z'$?



Distance, Milieu.

Soit A, B des points d'affixes a, b Alors

$d(A,B) =$ La distance entre A et B est égale à

L'affixe du milieu du segment du $[AB]$ est

Formule d'un angle orienté.

Soit A, B, C des points d'affixes a, b, c

$$\boxed{\text{l'angle } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \text{ est égale à } \theta \quad \text{Ssi} \quad \frac{c-a}{b-a} = \cdots = r\,e^{i\theta}}$$

Application

Les points A,B et C sont alignés Ssi θ, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, est égale à 0 ou π
Ssi $e^{i\theta} = 1$ ou -1
Ssi $r\,e^{i\theta} = \pm r \in \mathbb{R}$
Ssi le complexe $\dfrac{c-a}{b-a}$ est réel

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux Ssi θ, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, est égale à $\pm\dfrac{\pi}{2}$
Ssi $e^{i\theta} = i$ ou $-i$
Ssi $r\,e^{i\theta} = \pm i r \in i\mathbb{R}$
Ssi le complexe $\dfrac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur

Le triangle ABC est équilatéral (direct) Ssi θ, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, est égale à $\dfrac{\pi}{6}$ et $r = 1$
Ssi $\dfrac{c-a}{b-a} = r.e^{i\theta} = e^{i\pi/6}$

6 Exercices

—— Manipulation/Visualisation de $e^{i\theta}$ ——

Exercice 14.

1. À quoi est égale $e^{i\frac{7\pi}{2}}$

   ☐ 1 ☐ -1 ☐ $-i$ ☐ $-i$

2. À quoi est égale $-e^{i\frac{\pi}{6}}$

   ☐ $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ☐ $e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ☐ $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ☐ $e^{-i\frac{7\pi}{6}}$

3. Placer les complexes suivants sur le cercle trigo.

$$e^{i\frac{\pi}{2}} \quad ,e^{-i\pi} \quad ,e^{-i\frac{\pi}{8}}, \quad e^{-i\frac{2\pi}{3}}, \quad e^{i\frac{5\pi}{12}}, \quad e^{i\frac{7\pi}{8}}, \quad e^{i\frac{17\pi}{3}}, \quad e^{i\frac{56\pi}{8}}$$

4. À quoi est égale $e^{-i\frac{5\pi}{4}}$

   ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

5. À quoi est égale $e^{i\frac{\pi}{6}}$

   ☐ $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i$ ☐ $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

Exercice 15.

1. À quoi est égale $\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}}$

   ☐ $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $\frac{1\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ☐ $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

2. À quoi est égale $e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{-i\frac{\pi}{4}}$

   ☐ $e^{i\frac{\pi}{12}}$ ☐ $e^{i\frac{-\pi}{12}}$ ☐ $-e^{i\frac{\pi}{12}}$

3. À quoi est égale $\frac{1}{e^{i\theta}}$

   ☐ $e^{i\frac{1}{\theta}}$ ☐ $e^{-i\frac{1}{\theta}}$ ☐ $e^{-i\theta}$ ☐ $-e^{i\theta}$

4. À quoi est égale $i\,e^{i\theta}$

   ☐ $e^{i\frac{\theta}{2}}$ ☐ $e^{i\theta+\frac{\pi}{2}}$ ☐ $e^{i\theta+i\frac{\pi}{2}}$ ☐ $e^{i\theta-i\frac{\pi}{2}}$

——— Factoriser l'argument moitié ———

Exercice 16. [Correction] Soit z un complexe de module 1 avec $z\neq 1$. Calculer $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)$

Exercice 17. [Correction] Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire de $\frac{1-e^{in\theta}}{1+e^{i\theta}}$

Exercice 18. [Correction] Montrer $\forall\,(z,z')\in\mathbb{C}^2$,

$$\left.\begin{array}{c}|z|=|z'|=1\\ z.z'\neq -1\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{z+z'}{1+z.z'}\in\mathbb{R}.$$

Exercice 19. [Correction] Soient a et b, deux complexes de module 1 tels que les dénominateurs ne s'annulent pas.

Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ et $\frac{a+b}{1+ab}$ appartiennent à $\mathbb{R}$.

— Mettre un complexe sous la forme $r\,e^{i\theta}$ —

Exercice 20. [Correction]

1. Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants : $12, -4, \quad -2i\sqrt{3}, \quad 1+i, \quad \dfrac{-\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$
2. En utilisant la forme trigo, calculer $\dfrac{\sqrt{3}-i}{i-1}, \quad \dfrac{1}{1+i\tan x}, \quad \left(\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^7, \quad \left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^n$

Un peu de trigo

Exercice 21.

1. Finir les calculs proposer dans le théorème et vérifier que :
$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x)-\sin^2(x) \qquad \text{et} \quad \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)\\ &= 2\cos^2(x)-1\end{aligned}$$
2. Montrer que
$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3(x)-3\sin^2(x)\cos(x) \qquad \text{et} \quad \sin(2x) = \sin(x)\left(4\cos^2(x)-1\right)\\ &= 4\cos^3(x)-3\cos(x)\end{aligned}$$

Exercice 22.

1. Finir les calculs proposer dans le théorème et vérifier que :
$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \text{et} \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
Application : En déduire une primitive de $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$
2. Montrer que
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$
$$\cos(x)\sin(y) = \frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{2}$$
3. Finir le calcul
$$\cos^3(x) = \left[\cos(x)\right]^3 = \left[\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right]^3 = \text{On développe avec le binôme, on simplifie les puissance puis on regroupe.}$$
Application : En déduire une primitive de $\cos^3(x)$.

Un peu de géométrie

Exercice 23. Théorème de Von Aubel.

On considère un quadrilatère $ABCD$ de sens direct et on note a, b, c, d les affixes des points A, B, C, D.
On construit 4 carrés C_1, C_2, C_3 et C_4 de centres respectifs P, Q, R et S qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ du quadrilatère $ABCD$.

1. Faire une figure avec le quadrilatère $ABCD$, le carré C_1 et son centre P
Calculer les affixes des différents points en fonction des complexes a et b. En particulier déterminer l'affixe de P
2. Démontrer que les diagonales de $PQRS$ sont perpendiculaires et de mêmes longueurs
Conclusion le quadrilatère $PQRS$ est un carré (c'est le thm de Von Aubel).

Correction.

Solution de l'exercice 8 **(Énoncé)**

On a

$$\left|\frac{2}{1+it}-1\right| \overset{\text{Mariage}}{=} \left|\frac{1-it}{1+it}\right| \overset{\text{Formulaire}}{=} \frac{|1-it|}{|1+it|} \overset{\text{def module}}{=} \frac{\sqrt{(1)^2+(-t)^2}}{\sqrt{(1)^2+(t)^2}} = 1$$

ou bien mais c'est plus long et plus difficile

$$\begin{aligned}\left|\frac{2}{1+it}-1\right| &\overset{\text{Forme a+ib}}{=} \left|\frac{2}{(1+it)}\frac{(1-it)}{(1-it)}-1\right| \\ &= \left|\frac{2(1-it)}{1^2+t^2}-1\right| \\ &= \left|\frac{1-t^2}{1+t^2}-i\frac{2t}{1+t^2}\right| \\ &\overset{\text{def module}}{=} \sqrt{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{t^4+2t^2+1}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{t^4+2t^2+1}{t^4+2t^2+1}} = \sqrt{1} = 1\end{aligned}$$

Conclusion : $\left|\frac{2}{1+it}-1\right|$ = Distance entre $\frac{2}{1+it}$ et 1 est égale à 1.

Ainsi $\frac{2}{1+it}$ est sur le cercle de centre $\Omega = (1,0)$ et de Rayon 1.

Solution de l'exercice 9 **(Énoncé)** On a que

$$\begin{aligned}\frac{az+b}{cz+d} &= \frac{(az+b)\overline{(cz+d)}}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{(ax+b+iay)(cx+d-icy)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{Moche+i[acxy+ady-acxy-bcy]}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{Moche+i[(ad-bc)y]}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{Moche+i[y]}{|cz+d|^2}\end{aligned}$$

Conclusion : $\text{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \text{Im}\left(\frac{Moche+i[y]}{|cz+d|^2}\right) = \frac{y}{|cz+d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2}$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

1. On calcule $|u+v|^2+|u-v|^2=(u+v)\overline{(u+v)}+(u-v)\overline{(u-v)}=\cdots$
2. On suppose que $|z|=1$
   On calcule $|1+iz|^2+|z+i|^2=(1+iz)\overline{(1+iz)}+(z+i)\overline{(z+i)}=\cdots$
3. Comme $|a|=1$, Donc on sait que $\overline{a}.a=|a|^2=1$

   On va montrer que : $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|=1$

   On y va brutal

$$\begin{aligned}\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|=\sqrt{Z\overline{Z}}&=\sqrt{\left(\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right)\overline{\left(\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right)}}\\&=\sqrt{\left(\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right)\left(\frac{\overline{a}-\overline{b}}{1-a\overline{b}}\right)}\\&=\sqrt{\frac{\textit{On développe le haut}}{\textit{On développe le Bas}}}\\&\quad\textit{On utilise que } a\overline{a}=|a|^2=1^2=1\\&=\sqrt{1}=1\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 11 (Énoncé)

$\Longrightarrow$ On suppose que $A\in\mathbb{R}$

$\boxed{\text{On va montrer } |u|=1, \text{ i.e. } u\overline{u}=....=1.}$

On a $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}=A\Longrightarrow u=\dfrac{A-z}{A-\overline{z}}$

Ainsi on a $\quad u\overline{u}=\dfrac{A-\overline{z}}{A-z}.\overline{\left(\dfrac{A-\overline{z}}{A-z}\right)}=\dfrac{A-\overline{z}}{A-z}.\dfrac{\overline{A}-z}{\overline{A}-\overline{z}}=\dfrac{A-\overline{z}}{A-z}.\dfrac{A-z}{A-\overline{z}}=1$

$\Longleftarrow$ Comment on démontre que $A\in\mathbb{R}$ avec la conjugaison ?

On sait que $A\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow\overline{A}=A\Longleftrightarrow\overline{A}-A=0$.

$\boxed{\text{On doit montrer } \overline{A}-A=0.}$

On a $\overline{A}-A=\overline{\left(\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}\right)}-\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}=\cdots=0$

Solution de l'exercice 13 (Énoncé) Soit $z=x+iy$.

1. On a $f(z)=\dfrac{z^2+2i}{z\overline{z}+1}=\dfrac{Haut}{Bas}$
   Comme $Bas=z\overline{z}+1=(x+iy)(x-iy)+1=x^2+y^2+1$ et $x,y\in\mathbb{R}$, ainsi Bas est toujours $\neq 0$.
   Donc on ne divise jamais par 0.
2. On a

$$\begin{aligned}z'=f(z)=\frac{z^2-2i}{z\overline{z}+1}\in\mathbb{R}&\Longleftrightarrow\overline{z'}=z'\\&\Longleftrightarrow\overline{\left(\frac{z^2-2i}{z\overline{z}+1}\right)}=\frac{z^2-2i}{z\overline{z}+1}\\&\Longleftrightarrow\frac{\overline{z}^2+2i}{z\overline{z}+1}=\frac{z^2-2i}{z\overline{z}+1}\\&\Longleftrightarrow\overline{z}^2+2i=z^2-2i\\&\Longleftrightarrow z^2-\overline{z}^2=4i\end{aligned}$$

3. On écrit $z = x + iy$ et on poursuit le calcul.

$$\begin{aligned}
z' = f(z) = \frac{z^2 - 2i}{z\overline{z}+1} \in \mathbb{R} &\Longleftrightarrow z^2 - \overline{z}^2 = 4i \\
&\Longleftrightarrow (x+iy)^2 - (x-iy)^2 = 4i \\
&\Longleftrightarrow [x^2 - y^2 + i2xy] - [x^2 - y^2 - i2xy] = 4i \\
&\Longleftrightarrow i4xy = 4i \\
&\Longleftrightarrow y = \frac{1}{x} \quad \text{avec } x \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow z = x + iy = x + i\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Conclusion : On a bien $z' = f(z) \in \mathbb{R}$ Ssi on peut écrire $z = x + i\frac{1}{x}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$

4. Montrer (en suivant la même démarche) que : $z' = f(z) \in i\mathbb{R}$ Ssi on peut écrire $z = x + ix$ ou $z = x - ix$.

Solution de l'exercice 16 (Énoncé)

Comme $z \in \mathbb{U}$, on peut écrire $z = e^{i\theta}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-e^{i\theta}} &= \textit{Argument moitié} \\
&= \frac{1}{e^{i\theta/2}[-2i\sin(\theta/2)]} \\
&= \frac{ie^{-i\theta/2}}{2\sin(\theta/2)} \\
&= \frac{i[\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)]}{2\sin(\theta/2)} \\
&= \frac{1}{2} + i\frac{\cos(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$

Solution de l'exercice 17 (Énoncé)
Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire de

$$\begin{aligned}
\frac{1-e^{in\theta}}{1+e^{i\theta}} &= \text{argument moitié} \\
&= \frac{e^{in\theta/2}[........]}{e^{i\theta/2}[........]} \\
&= e^{i(n-1)\theta/2}\frac{-2i\sin(n\theta/2)}{2cos(\theta/2)} \\
&= i\frac{-\sin(n\theta/2)}{cos(\theta/2)}[\cos(\square) + i\sin(\square)] \\
&= \underbrace{\frac{\sin(n\theta/2)}{cos(\theta/2)}\sin(\square)}_{\textit{Partie réelle}} - i\frac{\sin(n\theta/2)}{cos(\theta/2)}\cos(\square)
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 18 (Énoncé) On suppose $|z| = 1$ et $|z'| = 1$

$$\boxed{\text{On va montrer que : } \frac{z+z'}{1+z.z'} \in \mathbb{R}.}$$

Comme $|z| = 1$ et $|z'| = 1$, on peut écrire $z = e^{i\theta}$ et $z' = e^{i\theta'}$

$$\textit{Ainsi on a } \frac{z+z'}{1+z.z'} = \frac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{1+e^{i\theta}.e^{i\theta'}}$$

Argument moitié

$$= \underbrace{\frac{e^{i\theta/2}\,e^{i\theta'/2}}{e^{i(\theta+\theta')/2}}}_{=1}\left(\frac{\textit{moche}}{\textit{Pas bô}}\right)$$

$$= 1\frac{\cos\left(\dfrac{\theta-\theta'}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\theta+\theta'}{2}\right)} \in \mathbb{R}$$

Solution de l'exercice 19 (Énoncé)

Correction 1 : On va utiliser $e^{i\square}$ et l'argument moitié.

Comme $|a|=1$ alors il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $a=e^{i\theta}$.
De même comme $|b|=1$ alors il existe $\theta'\in\mathbb{R}$ tel que $b=e^{i\theta'}$.

$$\text{Ainsi on a}\quad \frac{a+b}{1+ab}=\frac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{1+e^{i\theta}\,e^{i\theta'}}$$

Argument moitié

$$=\frac{e^{i\theta/2}\,e^{i\theta'/2}[.......]}{e^{i(\theta+\theta')/2}[.......]}=....=\frac{\cos(\frac{\theta-\theta'}{2})}{\cos(\frac{\theta+\theta'}{2})}$$

Correction 2 : On va utiliser $e^{i\square}$ et le couple Complexe-Conjugué.

On sait que :

$$A\in\mathbb{R}\iff \text{Im}(A)=0\iff\frac{A-\overline{A}}{2i}=0\iff\overline{A}=A$$

Conclusion : $A\in\mathbb{R}\iff\overline{A}=A$. *Rq : Cette caractérisation est "évidente" géométriquement.*
De plus comme $|a|=1$ et $|b|=1$ alors il existe $\theta,\theta'\in\mathbb{R}$ tel que $a=e^{i\theta}$ et $b=e^{i\theta'}$.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi on a}\quad \overline{A}=\overline{\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)}&=\frac{\overline{a}+\overline{b}}{1+\overline{a}\overline{b}}\\&=\frac{\overline{e^{i\theta}}+\overline{e^{i\theta'}}}{1+\overline{e^{i\theta}}\,\overline{e^{i\theta'}}}\\&=\frac{e^{-i\theta}+e^{-i\theta'}}{1+e^{-i\theta}\,e^{-i\theta'}}\\&\quad\text{On elève les puissances} <0\\&\quad\text{On simplifie les fractions}\\&=\frac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{1+e^{i\theta}\,e^{i\theta'}}=A\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 20 (Énoncé)

1. Facile ! ! !

   Il faut bien comprendre comment on place le point M d'affixe $e^{i\theta}$ en regardant l'angle entre la demi droite $\mathbb{R}^+$ et la demi droite $[OM)$.

2. Il faut faire des dessins ! ! ! !

   $>$ Avec le dessin, on a facilement

   $$12=12e^{i0},\qquad -4=4e^{i\pi}\qquad ,-2i\sqrt{3}=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

   $>$ $A=1+i=r\,e^{i\theta}$?

   On commence par $r=|A|=|1+i|=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$

   Ainsi $\dfrac{1+i}{|1+i|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ est complexe de module 1,

   On fait un dessin et on le place sur le cercle $\mathbb{U}$ et on lit l'angle $\theta={}^{\pi}/_{4}$

   On trouve $\dfrac{1+i}{|1+i|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{4}}$

   Conclusion : $1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

> $A = \dfrac{-\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = r\,e^{i\theta}$?

On commence par $r = |A| = \left|\dfrac{-\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}\right| = \cdots = \sqrt{2}$

Ainsi $\dfrac{A}{|A|} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}$ est complexe de module 1,

On fait un dessin et on le place sur le cercle $\mathbb{U}$ et on lit l'angle $\theta = -2\pi/3$

On trouve $\dfrac{A}{|A|} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Conclusion : $\dfrac{-\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = r\,e^{i\theta} = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

3. On utilise $\rho e^{i\square}$ et le formulaire sur les puissances

$$\frac{\sqrt{3} - i}{i - 1} = \frac{r\,e^{i\theta}}{r'\,e^{i\theta'}} = \frac{2\ e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \sqrt{2}\,e^{i(-\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4})}$$

$$\frac{1}{1 + i\tan x} = \frac{1}{1 + i\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \frac{\cos(x)}{\cos(x) + i\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{e^{i(\frac{\pi}{2} - x)}}$$

$$\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7 = \left(r\,e^{i\theta}\right)^7 = r^7\,e^{i7\theta}$$

$$\left(\frac{-1 + i}{\sqrt{3} - i}\right)^{1492} = \left(\frac{r\,e^{i\theta}}{r'\,e^{i\theta'}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}\ e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2\ e^{-i\frac{\pi}{6}}}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6})}\right)^n$$