TD 3 Inégalité(s)-Somme.

Jeudi 19 Septembre 2024.

Inégalités

Exercice 1. [Correction] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

On admet que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 1 + \cos(2x) = 2\, \cos^2(x)$

Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 2\, \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Exercice 2.

1. On considère la fonction f définie par : $f : t \longmapsto f(t) = \dfrac{1}{\ln(1+t)}$

   Montrer que la fonction f est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.
2. On considère la fonction f définie par : $f : t \longmapsto f(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{2}{t}\right)$

   Montrer que la fonction f est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$

Exercice 3. [Correction]

1. Montrer que : $\forall\, x > -1,\quad \ln(1+x) \leqslant x$
2. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

   Rappel : on utilisera la phrase : " J'applique l'inégalité avec ...

Exercice 4. [Correction]

1. Montrer que : $\forall\, x > 0,\ \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} \leqslant 1$
2. En déduire (difficile) que : $\forall\, x > 0,\ 1 + x^{1492} \geqslant \dfrac{(2x)^{1491}}{(1+x)^{1490}}$

   Indication : C'est le 2-ième temps de la valse.
   Comment faire apparaitre $1 + x^{1492}$, à l'aide de la question précédente ?
   Comment faire apparaitre $(1+x)^{1490}$, à l'aide de la question précédente ?

Somme

Exercice 5. [Correction]

Calculer les sommes suivantes
$$\sum_{k=n}^{3n}(3k-1), \quad \sum_{i=0}^{n} i(i+2), \quad \sum_{k=1}^{2n}\max(k,n)$$

Exercice 6. [Correction] Rappel : On sait que $2017 = 7.10^0 + 1.10^1 + 0.10^2 + 2.10^3$

Écrire sous forme de somme et Calculer $\underbrace{11\cdots1}_{n\ fois}$ puis $1 + 11 + 111 + 1111 + ... + \underbrace{11\cdots1}_{n\ fois}$

Exercice 7. [Correction] Calculer les produits suivant
$$\prod_{k=1}^{n}(-k) \qquad \prod_{k=1}^{n}\left(2k.2^k\right) \qquad \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} \qquad \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2}{k^2-1} = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$$

Exercice 8. Simplifier $(n+1)! - n!$ En déduire, *à l'aide d'un télescopage*, $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$

Exercice 9. [Correction] Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$

En déduire, *à l'aide d'un télescopage*, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 10. [Correction] Soit $x \in \mathbb{C} - \{1\}$. L'objectif est de calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$

1. Méthode 1.

   Montrer, par récurrence, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$.

2. Méthode 2. Astuce. En utilisant la ré-indexation $k = p + 1$.

3. Méthode 3. La bonne méthode est de remarquer que : $[x^k]' = k\,x^{k-1}$ ainsi $kx^k = x\,[x^k]'$.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

On fait par récurrence $H < n > u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Initialisation pour $n = 0$

facile

Hérédité : On suppose $H < n >$

$$\boxed{\text{On va montrer } H < n+1 >\text{, CàD } u_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \sqrt{2-u_n} &= \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \\ &= \sqrt{2(1+\cos(2x))} \qquad \textit{avec } x = \frac{\pi}{2^{n+2}} \\ &= \sqrt{2.2\cos^2(x)} \\ &= 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right| = \oplus 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. On a $\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln(1)$ on continue "facilement" avec les intégrales.

   Il y a quand même une petite subtilité si $-1 < x \leqslant 0$ car les bornes sont décroissantes

   $$x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$$

2. Soit $n > 0$ fixé.

   $>$ $\boxed{\text{On va montrer } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e}$

   On y va direct

   $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a^{bouge} = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

   On applique l'inégalité de Q.1 avec $x = \frac{1}{n} > 0$

   $$\leqslant e^{n\frac{1}{n}} = e$$

   $>$ $\boxed{\text{On va montrer } e \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}}$

   On suit la même démarche

   $$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = a^{bouge} = e^{-n\ln(1-\frac{1}{n})} = e^{+0-B}$$

   Pour minorer A-B,

   on minore +A et majore -B

   On applique l'inégalité de Q.1 avec $x = -\frac{1}{n} > -1$

   ainsi $\ln(1-\frac{1}{n}) \leqslant -\frac{1}{n}$

   $$\geqslant e^{-n\left(-\frac{1}{n}\right)} = e$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) Une inégalité (la question b. est difficile).

1. Pour tout $x > 0$,

   $$1 - \frac{2\sqrt{x}}{1+x} = \frac{1+x-2\sqrt{x}}{1+x} = \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{1+x} > 0 \text{ fini}$$

2. Il y a plusieurs étapes

> D'une part.

J'applique l'égalité avec x^{1492}, ainsi $\dfrac{2\sqrt{x^{1492}}}{1+x^{1492}} \leqslant 1 \iff 1+x^{1492} \geqslant 2x^{746}$

> D'autre part.

On élève puissance 1490 l'inégalité précédente, c'est valise car tout est > 0.

Ainsi on a $\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^{1490} \leqslant 1^{1490} \iff \dfrac{2^{1490}x^{745}}{(1+x)^{1490}} \leqslant 1$

> Conclusion : $1+x^{1492} \geqslant 2x^{746}$

$$\begin{aligned} &\geqslant 2x^{746}\,\frac{2^{1490}x^{745}}{(1+x)^{1490}} \\ &\geqslant \frac{(2x)^{1491}}{(1+x)^{1490}} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

On a

> $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k+1 = \left[\sum_{k=1}^{n} k\right]+1 = \frac{n(n+1)}{2}+1$

> $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n(n+1)}{2}+n$

> $\displaystyle\sum_{k=n}^{3n}(3k-1) = 3\sum_{k=n}^{3n} k - \sum_{k=n}^{3n} 1 = 3\left[\frac{3n(3n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2}\right] - 1(3n-n+1)$

> $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i+2) = \sum_{i=0}^{n}(i^2+2i) = \sum_{i=0}^{n} i^2 + 2\sum_{i=0}^{n} i$

> $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\max(k,n) = \sum_{k=1}^{n}\max(k,n) + \sum_{k=n+1}^{2n}\max(k,n) = \sum_{k=1}^{n} n + \sum_{k=n+1}^{2n} k$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) Correction rapide. On a

> $\displaystyle 11\cdots1 = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k = \frac{1-10^n}{1-10} = \frac{1}{9}\left(10^n-1\right)$

$$\begin{aligned} 1+11+111+1111+.....+\underbrace{11\cdots1}_{n\ fois} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{9}\left(10^k-1\right) \\ &= \frac{1}{9}\left[\sum_{k=0}^{n}10^k - \sum_{k=0}^{n}1\right] \\ &= \frac{1}{9}\left[\frac{1-10^{n+1}}{1-10} - n\right] \\ &= \frac{1}{9}\left[\frac{10^{n+1}-1}{9} - n\right] = \frac{10^{n+1}-1-9n}{81} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

$$\prod_{k=1}^{n}(-k) = \underbrace{-1}_{k=1}\,\underbrace{-2}_{k=2}\cdots\underbrace{-n}_{k=n} = (-1)^n\,n!$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(2k.2^k\right) = \underbrace{2.1.2^1}_{k=1}\,\underbrace{2.2.2^2}_{k=2}\cdots\underbrace{2.n.2^n}_{k=n} = 2^n\,n!\,2^{1+2+\cdots+n} = 2^n\,n!\,2^{n(n+1)/2}$$

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = \underbrace{\frac{2}{1}}_{k=1}\,\underbrace{\frac{3}{2}}_{k=2}\cdots\underbrace{\frac{n+1}{n}}_{k=n} = \frac{n+1}{1}$$

Comme $k^2-1=(k+1)(k-1)$, on a

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2}{k^2-1} &= \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2}{(k+1)(k-1)}\\ &= \underbrace{\frac{2.2}{1.3}}_{k=2}\underbrace{\frac{3.3}{2.4}}_{k=3}\underbrace{\frac{4.4}{3.5}}_{k=4}\cdots\underbrace{\frac{(n-1).(n-1)}{(n-2)n}}_{k=n-1}\underbrace{\frac{n.n}{(n-1)(n+1)}}_{k=n}\\ &\quad \textit{il y a plein de simplification}\\ &\quad \textit{les 3 se simplifient, de même que les 4,5,...,(n-2)}\\ &\quad \textit{il reste}\\ &= \frac{2}{1}\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé) On trouve $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1/2}{k} + \dfrac{-1}{k+1} + \dfrac{1/2}{k+2}$

Avec le télescope, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = ... =$$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé) On a

1. facile

2. Méthode 2. On a

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=1}^{n} k\, x^k \\ &\quad \textit{On réindexe avec } p = k+1 \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} (k+1)\, x^{k+1} \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} (k+1)\, x^k\, x \\ &= x \sum_{p=0}^{n-1} k\, x^k + x \sum_{p=0}^{n-1} x^k \\ &= x\, S_{n-1} + x \times (Somme\ Géo) \\ &= x\,(S_n - n\, x^n) + x \times (Somme\ Géo) \\ &\quad\quad \textit{On en déduit la valeur de } S_n \end{aligned}$$

3. Méthode 3. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} kx^k &= \sum_{k=1}^{n} x\,[x^k]' \\ & x \sum_{k=1}^{n} x\,[x^k]' \\ &= x \left[\sum_{k=1}^{n} x^k \right]' \\ &= x \left[\sum_{k=0}^{n} x^k - \underbrace{1}_{k=0} \right]' \\ &= x \left[\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 1 \right]' \end{aligned}$$