TD 5 Complexes.

Vendredi 27 Septembre 2024.

Algébrique Vs Circulaire.

Exercice 1. [Correction] On considère $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = 1 + i$

1. Algébrique. Calculer $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.
2. Calculer module et l'argument de z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$
3. Application Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Exercice 2. [Correction] On considère la complexe $A = \sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Calculer A^2 puis déterminer la forme circulaire de A^2 en imaginer celle de A

Exercice 3. [Correction]

1. Calculer $\left(-\sqrt{3} + i\right)^3$ avec le binôme.
2. Mettre le complexe $-\sqrt{3} + i$ sous forme circulaire puis calculer $\left(-\sqrt{3} + i\right)^3$.

Exercice 4. [Correction] Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Considère $A = 1 - e^{i\theta}$.

1. Mettre le complexe A sous la forme $r\, e^{i\square}$.
2. En déduire : Re(A), Im(A), $|A|$ et $\arg(A)$

Binôme.

Exercice 5. On sait que : $\forall \square \in \mathbb{R},\ \cos(\square) = \dfrac{e^{i\square} + e^{-i\square}}{2}$ et que le formulaire sur les exp s'applique.

Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos^3(x) = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \dfrac{3\cos(x) + \cos(3x)}{4}$

On sait que : $\forall \square \in \mathbb{R},\ \sin(\square) = \dfrac{e^{i\square} - e^{-i\square}}{2i}$ et que le formulaire sur les exp s'applique.

Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin^3(x) = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \dfrac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}$

Exercice 6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère le complexe $A = \left(e^{i\theta}\right)^4 = (\cos\theta + i\sin\theta)^4$

1. Avec le formulaire 18h,19h,..., calculer A puis Re(A).
2. Calculer, avec le binôme A puis Re(A).

Exercice 7. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère le complexe $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik}$

1. Calculer, avec les sommes géo S_n puis Re(S_n).
2. Calculer Re(S_n).

Bonus

Exercice 8. [Correction] Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ avec $a\neq b$ et $|a|=1$.

Montrer que : $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|=1$

Exercice 9. [Correction] Soit u un complexe avec $u\neq 1$. Soit z un complexe avec $z\notin\mathbb{R}$.

On veut montrer : $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}=A\in\mathbb{R} \iff |u|=1$

$\Longleftarrow$ Calculer $\overline{A}-A$. Conclure.

$\Longrightarrow$ On suppose que $A\in\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{On doit montrer } |u|=1\text{, CàD } u\,\overline{u}=\ldots.=1.}$$

Étape 1 : On isole u. Étape 2 : On calcule $u\,\overline{u}$.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Algébrique. On a

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}+i}{1+i} &= \frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\,\frac{1-i}{1-i} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+i)(1-i)}{|1+i|^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}+i-\sqrt{3}i-i^2}{(1)^2+(1)^2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)+i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

2. On applique la méthode du cours, ainsi $z_1 = 2\,e^{i\pi/6}$, $z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$

   On en déduit $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\,e^{i\pi/6}}{\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/12}$

3. On va rapprocher les deux calculs

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/12} = \sqrt{2}\,[\cos\square \ominus i\sin\square] = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)+i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

   Conclusion : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et (bonus) $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \ominus\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

$>$ On a

$$\begin{aligned}A^2 &= \left[\sqrt{2-\sqrt{3}}+i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]^2 \\ &= \left(2-\sqrt{3}\right)+2i\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{3}}+i^2\left(2+\sqrt{3}\right) \\ &= \left(\left(2-\sqrt{3}\right)-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)+2i\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ &= -2\sqrt{3}+2i\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} \\ &= -2\sqrt{3}+2i\sqrt{4-3} = -2\sqrt{3}+2i\end{aligned}$$

Comme $\left|A^2\right| = \sqrt{12+4} = 4$, on a

$$\frac{A^2}{|A^2|} = \frac{1}{4}\left(-2\sqrt{3}+2i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Conclusion : $A^2 = 4\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$>$ Comme $A^2 = 4\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$, le complexe A est une solution de l'équation $X^2 = 4\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et on a

$$X^2 = 4\,e^{i\frac{5\pi}{6}} \iff X = +\sqrt{4\,e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \left(4\,e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{1/2} = 2\,e^{i\frac{5\pi}{12}} \text{ ou } X = -2\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

Or on sait que $\mathrm{Re}\,(A) = \sqrt{2-\sqrt{3}} > 0$ Donc $A = 2\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. On a

$$\begin{aligned}
\left(-\sqrt{3}+i\right)^3 = (a+b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \underbrace{\binom{3}{k} a^k\, b^{3-k}} \\
&= \underbrace{1(-\sqrt{3})^0\,(i)^{3-0}} + \underbrace{3(-\sqrt{3})^1\,(i)^2} + \underbrace{3(-\sqrt{3})^2\,(i)^1} + \underbrace{1(-\sqrt{3})^3\,(i)^0} \\
&= -i + 3\sqrt{3} + 3.3.i - 3\sqrt{3} \\
&= 8\,i
\end{aligned}$$

2. On a $-\sqrt{3}+i = 2\,e^{-\frac{5\pi}{6}}$

   Ainsi $\left(-\sqrt{3}+i\right)^3 = \left(2\,e^{\frac{i5\pi}{6}}\right)^3 = 2^3\,e^{\frac{i5\pi}{2}} = 8e^{\frac{i\pi}{2}} = 8i.$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Avec l'argument moitié, on a $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left[e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right]$

$$\begin{aligned}
&= e^{i\frac{\theta}{2}}\left[(C - i\,S) - (C + i\,S)\right] \\
&= e^{i\frac{\theta}{2}}\left[-2i\sin\frac{\theta}{2}\right] = r\,e^{i\square}
\end{aligned}$$

   Mais r est un réel à priori $\geqslant 0$ donc on est gêné par $\ominus$ et par i.

   Avec le cercle trigo, on sait que : $\ominus = e^{i\pi}$ et par $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

   Conclusion : $A = 1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left[-2i\sin\frac{\theta}{2}\right] = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$

2. On a donc

   $\text{Re}(A) = 2\sin\frac{\theta}{2}\,\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

   $\text{Im}(A) = 2\sin\frac{\theta}{2}\,\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

   $|A| = r = 2\sin\frac{\theta}{2}$

   et $\arg(A) = \frac{\theta}{2}+\pi+\frac{\pi}{2}$

   Complément

   En fait c'est un peu plus subtile car $r = 2\sin\frac{\theta}{2}$ *n'est pas forcément* $\geqslant 0$.

   Ainsi $|A| = |r| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| = \pm\,2\sin\frac{\theta}{2}$

   Et lorsque $+$ *:* $\arg(A) = \frac{\theta}{2}+\pi+\frac{\pi}{2}$ *lorsque - :* $\arg(A) = \frac{\theta}{2}+2\pi+\frac{\pi}{2} = \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}$

Solution de l'exercice 8 **(Énoncé)**

Solution 1

Comme $|a| = 1$, Donc on sait que $\overline{a}.a = |a|^2 = 1$

On va montrer que : $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1$

Ona

$$\begin{aligned}\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = \sqrt{Z\overline{Z}} &= \sqrt{\left(\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right)\overline{\left(\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right)}}\\ &= \sqrt{\left(\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right)\left(\frac{\overline{a}-\overline{b}}{1-a\overline{b}}\right)}\\ &= \sqrt{\frac{\textit{On développe le haut}}{\textit{On développe le Bas}}}\\ &\quad \textit{On utilise que } a\overline{a} = |a|^2 = 1^2 = 1\\ &= \sqrt{1} = 1\end{aligned}$$

Solution 2

Comme $|a| = 1$, on peut écrire (et replacer) $a = e^{i\theta}$

On va montrer que : $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = \left|\dfrac{e^{i\theta}-b}{1-e^{-i\theta}b}\right| = 1$

Ona

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = \sqrt{Z\overline{Z}} = \sqrt{\frac{e^{i\theta}-b}{1-e^{-i\theta}b} \times \frac{e^{-i\theta}-\overline{b}}{1-e^{i\theta}\overline{b}}}$$

On remplace les exposants < 0

$= \text{On simplifie les fractions} \qquad = 1$

Solution de l'exercice 9 **(Énoncé)**

$\Longleftarrow$ Comment on démontre que $A \in \mathbb{R}$ avec la conjugaison ?

On sait que $A \in \mathbb{R} \iff \overline{A} = A \iff \overline{A} - A = 0.$

$\boxed{\text{On doit montrer } \overline{A} - A = 0.}$

On a $\overline{A} - A = \overline{\left(\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}\right)} - \dfrac{z-u\overline{z}}{1-u} = \cdots = 0$

$\Longrightarrow$ On suppose que $A \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{On va montrer } |u| = 1, \text{ i.e. } u\,\overline{u} = ... = 1.}$

On a $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u} = A \Longrightarrow u = \dfrac{A-\overline{z}}{A-z}$

Ainsi on a $\quad u\overline{u} = \dfrac{A-\overline{z}}{A-z}.\overline{\left(\dfrac{A-\overline{z}}{A-z}\right)} = \dfrac{A-\overline{z}}{A-z}.\dfrac{\overline{A}-z}{\overline{A}-\overline{z}} = \dfrac{A-\overline{z}}{A-z}.\dfrac{A-z}{A-\overline{z}} = 1$