Les intégrales.

1 Définition et propriétés

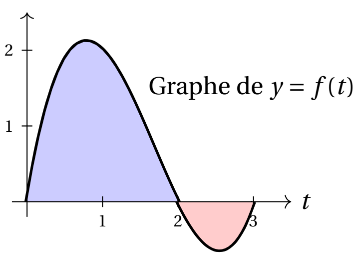
1.1 Intégrale et Aire

Définition 1. Définition géométrique d'une intégrale

Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ et Γ son graphe.

Alors le nombre $\int_a^b f(t)dt$ est définie géométriquement par

$$\int_a^b f(t)dt = \text{l'Aire } \underline{\textbf{algébrique}} \text{ entre le graphe et l'axe des abscisses.}$$



$$\int_0^3 f(t)\,dt = Bleu \ominus Rouge$$

Il est bien clair que cette définition géométrique n'est pas très mathématique (l'intégrale est une aire certes mais c'est quoi une aire) mais qui suffira pour ce début d'année.
La vraie construction sera faite en fin d'année scolaire.

A méditer.

Le nombre $\int_a^b f(t)\,dt$ dépend

> de la fonction f.
> des bornes a et b.
> MAIS ne dépend pas de "la variable **fantôme** d'intégration", CàD de t.

Théorème 2. Une intégrale se calcule Si ...

Soit f une fonction

Le nombre $\int_a^b \underbrace{f(t)}\,dt$ se calcule

Si la fonction $\underbrace{t \longmapsto f(t)}$ est continue sur le segment $[a,b]$.

1.2 Propriétés des intégrales

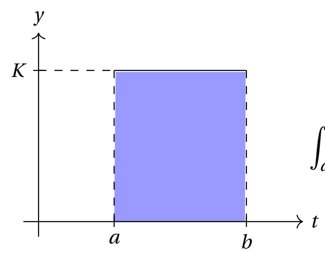
Théorème 3. Propriétés de l'intégrale.
Soit f, g une fonction continue de $[a, b]$, alors on a

> **Relation de Chasles.** $\forall\, c \in [a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$

> **Linéarité - Distributivité.** $\displaystyle\int_a^b \left[2f(t) - 3g(t)\right]\,dt = 2\int_a^b f(t)\,dt - 3\int_a^b g(t)\,dt$

> **Intégrer les constantes** $\displaystyle\int_a^b K_{onstante}\,dt = Base \times Hauteur = K \times (b-a)$

Démonstration : Le formulaire est une conséquence de la construction de l'intégrale que l'on n'a pas faites, donc on l'admettra.
Remarque : les propriétés sont compatibles avec la définition géométrique, entre autre pour les constantes



$\displaystyle\int_a^b K\,dt = Base \times Hauteur = K \times (b-a)$

Théorème 4. Conséquences classiques.
Soit f une fonction continue de $[a, b]$.

> **Classiques.**

$\forall\, c \in [a, b]$, $\displaystyle\int_c^c f(t)\,dt = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$

> **Bien utile.**

$$\int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt + \cdots + \int_{n-1}^n f(t)\,dt = \int_0^n f(t)\,dt$$

> **Majorer une intégrale**

Étape 1 : On majore la fonction plateau $\underbrace{f(t)}$ sur $[a, b]$
CàD $\forall\, t \in [a, b],\ f(t) \leqslant \cdots$

Étape 2 : On intègre l'inégalité sur $[a, b]$
Ainsi $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b \cdots\,dt$

> **Inégalité triangulaire**

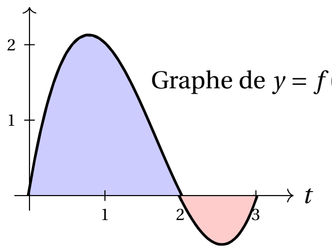
On a $\forall\, x, x' \in [a, b]$, $\displaystyle\left|\int_x^{x'} f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_x^{x'} |f(t)|\,dt\right|$

Démonstration : > Classique?
Avec Chasles, on a $\displaystyle\int_a^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^c f(t)dt$ donc forcément $\displaystyle\int_c^c f(t)dt = 0$.
Toujours avec Chasles, on a $0 = \displaystyle\int_A^A f(t)dt = \int_A^B f(t)dt + \int_B^A f(t)dt$

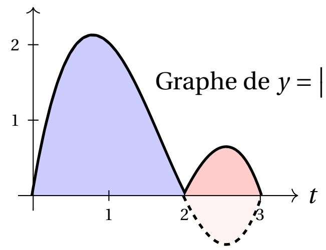
Donc forcément $\displaystyle\int_B^A f(t)dt = -\int_A^B f(t)dt$.

> Bien utile?
C'est du Chasles
> Inégalité triangulaire?
On distingue 2 situations : $x < x'$ et $x' < x$.

Interprétation géométrique de l'inégalité triangulaire.



$$\int_0^3 f(t)\,dt = Bleu \ominus Rouge$$



$$\int_0^3 |f(t)|\,dt = Bleu \oplus Rouge$$

2 Majorer une Intégrale

Théorème 5. Comment majorer une Intégrale

On veut majorer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$

> Étape 1. Pour $t \in [a,b]$,
on majore $f(t) \leqslant M(t)$ *avec Soit Viking, Soit avec Q1*

> Étape 2. On intègre l'inégalité de $t = a$ à $t = b$
Ainsi $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b M(t)\,dt$
$\leqslant$ *On calcule l'intégrale avec une primitive*

Exercice 1. Montrer que $\forall^t \geqslant 1, e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$
En déduire que : $\forall x \geqslant 1,\ F(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,dt$ est majorée.

Exercice 2. [Correction] On définit l'intégrale I_n par $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$

1. À l'aide d'un encadrement, montrer que : $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
2. Démontrer que : $\forall t \geqslant 0,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$
3. En déduire que : $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots\ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2 - (-1)^n\ I_n$
Que on peut conclure ?

Exercice 3. [Correction] Soit $x > 1$.
On va majorer le nombre $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt$

1. Étudier, sur $\mathbb{R}_+^*$, les variation de la fonction $\left[h : t \longmapsto e^{t^2} / t^2\right]$
2. En déduire que $\forall\ t \in [1,x],\quad \dfrac{e^{t^2}}{t^4} \leqslant \dfrac{e^{x^2}}{x^2} . \dfrac{1}{t^2}$
3. En déduire une majoration de $F(x)$ sur $[1, +\infty[$.

3 Transformations classiques.

Définition 6. Définition de $\mathscr{C}^1$

Soit f une fonction f définie sur $\mathscr{D}$.
On dit que la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$, notée $\mathscr{C}^1$

Ssi la fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et que la fonction dérivée f' est continue sur $\mathscr{D}$.

3.1 Intégration Par Partie

Théorème 7. Intégration par partie.

Soit f et g deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. On a

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$

Démonstration : On va calculer $\int_a^b \Big[f(t)g(t)\Big]'\,dt$ de 2 façons différentes.

> D'une part

$$\int_a^b \Big[f(t)g(t)\Big]'\,dt = \Big[Primitive\Big]_a^b = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b$$

> D'autre part

$$\int_a^b \Big[f(t)g(t)\Big]'\,dt = \int_a^b \Big[f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\Big]\,dt = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

Exercice 4. [Correction]

1. A l'aide d'une intégration par partie calculer les intégrales suivantes
$$\int_1^x \ln(t)\,dt,\quad \int_1^x (t^2+2t+2)\ln(t)\,dt,\quad \int_0^x (t+2)e^t\,dt,\quad \int_0^x \sin(t)e^t\,dt$$
2. On considère la suite (I_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad I_n = \int_1^e [\ln(t)]^n\,dt$

   Calculer I_{n+1} en fonction de I_n.
3. On considère la suite (I_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt$

   Montrer que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$. *Indication :* $\sin^{n+2}(t) = \sin^{n+1}(t)\sin(t)$

Exercice 5. [Correction] On considère la suite (I_n) définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

1. À l'aide d'une majoration, montrer que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2}\,dx$
3. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2}\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
4. En déduire que : $n I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} {}^1/_2$.

3.2 Changement de variable dans une intégrale

Théorème 8. Changement de variable.

Soit φ une fonction $\mathscr{C}^1$ et f une fonction $\mathscr{C}^1$.
(Je ne détaille pas les ensembles $\mathscr{D}$ et $\mathscr{A}$ pour ne pas alourdir)

Alors on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt$$

On dit que l'on a fait le changement de variable $x = \varphi(t)$

Démonstration : Je note H une primitive de f, ainsi

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = [\,Primitive\,]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = [\,H(t)\,]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = H(\varphi(b)) - H(\varphi(a))$$

De plus on a $\left[H(\varphi(x))\right]' = \varphi'(x)\,H'(\varphi(x))$ ainsi

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = [\,Primitive\,]_a^b = \left[\,H(\varphi(x))\,\right]_a^b = H(\varphi(b)) - H(\varphi(a))$$

Donc on a bien égalité — Fini

Exercice 6. [Correction] À l'aide du changement de variable, calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx. \quad \textit{on posera } x=\cos(t) \qquad \int_0^x \frac{1}{1+e^t}\,dt \quad \textit{on posera } u=e^t.$$

$$\int_1^x \sin(\ln t)\,dt \quad \textit{on posera } u=\ln(t) \qquad \int_1^2 \frac{1}{x(1+x^p)}\,dx \quad \textit{on posera } t=x^p.$$

Exercice 7. À l'aide du changement de variable, calculer les intégrales suivantes

$$\int_1^2 \frac{1}{t\sqrt{1+t}}\,dx. \quad \textit{on posera } x=\sqrt{1+t} \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1+\sin^2(x)}\,dt \quad \textit{on posera } u=\cos(x).$$

$$\int_0^{\ln(2)} e^{e^t+2t}\,dt \quad \textit{on posera } u=e^t \qquad \int_1^2 \frac{1}{x\left(4e^t-e^{-t}\right)}\,dx \quad \textit{on posera } t=\ln(x).$$

4 Calculer une intégrale via une primitive.

Définition 9.
Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$.
On dit que H est une primitive de f sur $\mathscr{D}$

Ssi la fonction H est dérivable sur $\mathscr{D}$ et que

$$\forall\, x \in \mathscr{D}, \quad H'(x) = \frac{d}{dx}\Big[H(x)\Big] = f(x)$$

Théorème. Si f est une fonction continue sur $\mathscr{D}$

Alors la fonction f admet des primitives

De plus $H : x \longmapsto H(x) = \int^x f(t)\,dt$ est une primitive de f.

De plus $\int_a^b f(t)dt = \Big[Primitive\Big]_a^b = \Big[H(t)\Big]_a^b = H(b) - H(a)$

Primitives "simples"

> Gestion des constantes

> Les monôme (vicieux) : $X^n \rightsquigarrow \dfrac{X^{n+1}}{n+1}$

> $\dfrac{\square'}{\square} \rightsquigarrow \ln|\square|$ Moins souvent : $\square'\square \rightsquigarrow \dfrac{\square^2}{2}$ et même $\square'\, h(\square)$

Bonus

> IPP ou petite décomposition en éléments simples

Exemples

$2x^3 - 3x + 2 \xrightarrow{\text{Une primitive}} 2\dfrac{x^4}{4} - 3\dfrac{x^2}{2} + 2x$

$(2x)^\alpha = 2^\alpha x^\alpha \xrightarrow{\text{Une primitive}} 2^\alpha \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

$\dfrac{3}{x} = 3\dfrac{1}{x} \xrightarrow{\text{Une primitive}} 3\ln|x|$

$\sin(x) \xrightarrow{\text{Une primitive}} -\cos(x)$

$e^x \xrightarrow{\text{Une primitive}} e^x$

$\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{\square'}{\square} \xrightarrow{\text{Une primitive}} \ln(\square)$

Exercice 8. [Correction] Déterminer les primitives des fonctions suivantes

$2x^4 - 5x^3 + 2x - 1 \xrightarrow{\text{Une primitive}}$

$\dfrac{1}{x^3} \xrightarrow{\text{Une primitive}}$

$\sqrt{x} \xrightarrow{\text{Une primitive}}$

$\left(t^4 + t + 1\right)\sqrt[3]{t} \xrightarrow{\text{Une primitive}}$

$\sin(2x) \xrightarrow{\text{Une primitive}}$

$e^{-2t} \xrightarrow{\text{Une primitive}}$

$e^{(2i+3)x} \xrightarrow{\text{Une primitive}}$

$\dfrac{1}{x+2} \xrightarrow{\text{Une primitive}}$

$\dfrac{1}{2x+3} \xrightarrow{\text{Une primitive}}$

$\dfrac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{Une primitive}}$

$\dfrac{sin(x)}{cos(x)} \xrightarrow{\text{Une primitive}}$

$\dfrac{1}{x(x+1)} \xrightarrow{\text{Une primitive}}$

$\dfrac{2x+1}{x^2+3x+2} \xrightarrow{\text{Une primitive}}$

Théorème 10. Comment rechercher une primitive.

> Le monôme caché.

> **Du bon sens.**

> $e^{3x} \overset{Une\ primitive}{----->} \frac{1}{3}e^{3x}$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right) \overset{Une\ primitive}{----->} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$e^{x^2} \overset{Une\ primitive}{----->} \underbrace{\frac{1}{2x}}_{OUPS!!!} e^{x^2}$ Donc du bon sens oui mais sans excès

> **Indispensable.** Une primitive de $\frac{\square'}{\square}$, c'est $\ln|\square|$

et plus généralement $u' f'(u) \overset{Une\ primitive}{----->} f(u)$

> Kulture φ Une primitive de $(3x+5)\,e^{2x}$ est de la forme $[ax+b]\,e^{2x}$.

Ainsi Une primitive de $x\,e^{2x} = (1x+0)\,e^{2x}$ est de la forme $[ax+b]\,e^{2x}$.

> Kulture φ Une primitive de $\sin(3x)\,e^{5x}$ est de la forme $[a\sin(3x)+b\cos(3x)]\,e^{5x}$.

Kulture : Comme $\sin(3x)\,e^{5x} = \mathrm{Im}\left(e^{i3x}e^{5x}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{(5x+i3x)}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{(5+i3)x}\right)$

Alors une primitive de $\sin(3x)\,e^{5x}$ est de la forme $\mathrm{Im}\left(\frac{e^{(5+i3)x}}{5+3i}\right)$.

> **Calculer une Primitive moins usuelles mais au programme.**

Le but est de calculer $\int^x f(t)\,dt$, CàD une primitive de f

> Quand il y a : $\ln(t)$ ou $\arctan(t)$ ou e^t ou $\sin(t)$, on fait une IPP

> Pour calculer $\int^x \sin^2(t)\,dt$ ou $\int^x \cos^3(t)\,dt$, on linéarise.

> Pour calculer $\int^x \frac{1}{t^2-3t+2}\,dt$, on fait une décomposition en éléments simples

> On peut aussi faire un changement de variable $u = \varphi(t) = Moche$.

$$\begin{aligned}\int^x \ln(t)\,dt &= \textit{On fait une IPP}\\ &= [t\ln(t)]^x - \int^x t\frac{1}{t}\,dt\\ &= x\ln(x) - \int^x 1\,dt\\ &= x\ln(x) - [t]^x\\ &= x\ln(x) - x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int^x \arctan(t)\,dt &= \textit{On fait une IPP}\\ &= \left[t\arctan(t)\right]^x - \int^x t\underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{=\square'/\square}\,dt\\ &= x\arctan(x) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]^x\\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\end{aligned}$$

$$\int^x (2t+3)e^t\,dt = \text{On fait une IPP}$$
$$= \left[(2t+3)e^t\right]^x - \int^x 2e^t\,dt$$
$$= (2x+3)e^x - 2\,e^x$$
$$= (2x+1)e^x$$

C'est bien de la forme $(ax+b)e^x$

$$\int^x (2t+3)\cos(t)\,dt = \text{On fait une IPP}$$
$$= [(2t+3)\sin(t)]^x - \int^x 2\sin(t)\,dt$$
$$= (2x+3)\sin(x) + 2\cos(x)$$

$$\int^x \sin^2(t)\,dt = \text{On linéairise } \sin^2(t)$$

CàD On sait que $\sin^2(t) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2$

$$= \int^x \tfrac{1}{2}\,[1-\cos(2t)]\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]$$

$$\int^x \cos^3(t)\,dt = \text{On linéairise } \cos^3(t)$$

CàD On sait que $\cos^3(t) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \cdots$

$$\int^x \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \text{On décompose en éléments simples } \frac{1}{t(t+1)}$$

CàD On trouve que $\frac{1}{t(t+1)} = \cdots = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}$

$$= \int^x \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right] dt$$
$$= \ln|x| - \ln|x+1|$$

$$\int^x \frac{1}{t^2-3t+2}\,dt = \text{On décompose en éléments simples } \frac{1}{t^2-3t+2}$$

CàD On trouve que $\frac{1}{t^2-3t+2} = \cdots = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t-2}$

$$= \int^x \left[\frac{a}{t-1} + \frac{b}{t-2}\right] dt$$
$$= a\ln|x-1| + b\ln|x-2|$$

$$\int^x \frac{\ln(t)}{t\left(1+\ln^2(t)\right)}\,dt$$

Faire le changement de variable $u = \ln(t)$

Exercice 9. Déterminer une primitive pour les expressions suivantes.

1. $\tan(t)$ *sur* $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$
2. te^{-3t^2} sur $\mathbb{R}$
3. $\dfrac{1}{1-2t}$ sur $]1/2, \infty[$
4. $\dfrac{t^2}{1+t^3}$ sur $\mathbb{R}^+$
5. $\dfrac{1}{t\ln(t)}$ sur $\mathbb{R}^+$
6. $\dfrac{2}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$
7. $\dfrac{1}{1+2t^2}$ sur $\mathbb{R}$

Correction.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Étude de (I_n).
   (a) On va encadrer l'intégrale
   > $\forall\, t \in [0,1]$
   $$\frac{0}{1+1} \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant \frac{t^n}{1+0}$$
   >J'intègre l'inégalité sur $[0,1]$
   $$\text{Ainsi } 0 \leqslant I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^1 t^n\,dt$$
   Or $\displaystyle\int_0^1 t^n\,dt = [\ Primitive]_0^1 = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$
   (b) C'est le théorème des 2 gendarmes.
2. On reconnait une Somme géo.
3. On remarque que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = [\ \ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$
   On intègre l'égalité de la question précédent sur $[0,1]$, ainsi
   $$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^1 \left[1 - t + t^2 - .... + (-1)^{n-1}\,t^{n-1} + (-1)^n\,\frac{t^n}{1+t}\right] dt$$
   > A Gauche : c'est égale à $\ln(2)$
   > A Droite : c'est égale à $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + (-1)^n\,I_n$
   Comme $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, on a
   $$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{1018}}{2018} + ... + \text{jusqu'à l'infini.}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) Correction rapide.

1. La fonction est croissante sur $[1,+\infty[$ et décroissantes sur $]0,1[$.
2. On sait que $x > 1$.
   > $\forall\, t \in [1,x]$,
   $$\frac{e^{t^2}}{t^4} = \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\frac{1}{t^2} = h(t)\frac{1}{t^2} \leqslant h(x)\frac{1}{t^2}$$
3. On intègre l'inégalité sur $[1,x]$
   Ainsi
   $$F(x) = \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \leqslant \int_1^x h(x)\frac{1}{t^2}\,dt$$
   $$\leqslant h(x)\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$$
   $$= h(x)\left[\frac{-1}{t}\right]_1^x = \frac{e^{x^2}}{x^2}\left[1 - \frac{1}{x}\right]$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

$$\boxed{\int_1^x \ln(t)\,dt.}$$

On fait une IPP $\quad u' = 1 \quad \rightsquigarrow \quad u = t$

$$v = \ln(t) \quad \rightsquigarrow \quad v' = \frac{1}{t}$$

$$\text{Ainsi } \int_1^x \ln(t)\,dt = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x t\frac{1}{t}\,dt = x\ln(x) - (x-1)$$

$\boxed{\int_1^x (t^2+2t+2)\ln(t)\,dt.}$

On fait une IPP $\quad u' = t^2+2t+2 \quad \rightsquigarrow \quad u = \frac{t^3}{3} + 2\frac{t^2}{2} + 2t$

$\quad v = \ln(t) \quad \rightsquigarrow \quad v' = \frac{1}{t}$

A finir

$\boxed{\int_0^x (t+2)e^t\,dt.}$

On fait une IPP $\quad u' = e^t \quad \rightsquigarrow \quad u = e^t$

$\quad v = t+2 \quad \rightsquigarrow \quad v' = 1$

$$\text{Ainsi } \int_0^x (t+2)e^t\,dt = [(t+2)e^t]_0^x - \int_1^x 1\,e^t\,dt$$

A finir

$\boxed{\int_0^x \sin(t)e^t\,dt.}$

On fait 2 IPP $\quad u' = \sin(t) \quad \rightsquigarrow \quad u = -\cos(t)$

$\quad v = e^t \quad \rightsquigarrow \quad v' = e^t$

Ainsi $\int_0^x \sin(t)e^t\,dt = e - \cos(x)\,e^x + \int_1^x \cos(t)\,e^t\,dt$

On calcule la nouvelle intégrale avec une IPP $\quad u' = \cos(t) \quad \rightsquigarrow \quad u = \sin(t)$

$\quad v = e^t \quad \rightsquigarrow \quad v' = e^t$

Ainsi $\int_0^x \cos(t)e^t\,dt = \sin(x)\,e^x - \int_1^x \sin(t)\,e^t\,dt$

Conclusion : $\int_0^x \sin(t)e^t\,dt = e - \cos(x)\,e^x + \sin(x)\,e^x - \int_1^x \sin(t)\,e^t\,dt$

On a donc : $\int_0^x \sin(t)e^t\,dt = \frac{e - \cos(x)\,e^x + \sin(x)\,e^x}{2}$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. Étude de (I_n).

   On va encadrer l'intégrale

   > $\forall x \in [0,1]$
   $$\frac{0}{1+1} \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant \frac{x^n}{1+0}$$

   > J'intègre l'inégalité sur $[0,1]$

   Ainsi $0 \leqslant I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 t^n\,dx$

   Or $\int_0^1 x^n\,dx == \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

   On conclut avec le théorème de 2 gendarmes que $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2. On a $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

   On fait une IPP
   $$u' = x^n \quad \rightsquigarrow \quad u = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
   $$v = \frac{1}{1+x} \quad \rightsquigarrow \quad v' = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

   A finir

3. On démontre avec la même méthode qu'à la question 1

   CàD encadrement de l'intégrale puis gendarme, que : $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   Ainsi on a $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2}\,dx = o(1)$

   Ainsi avec la question Q.2., on a
   $$I_n = \frac{1}{2(n+1) + \frac{1}{n+1}} + o(1)$$
   $$\Longrightarrow nI_n = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{n}{n+1}o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

$$\boxed{\int_0^x \frac{1}{1+e^t}\,dt \quad \text{on pose} \quad u = e^t.}$$

Les Bornes.

Si $t=0$ alors $u=e^0=1$.

Si $t=x$ alors $u=e^x$.

Différentielle.

Comme $u=e^t \implies du = e^t\,dt = u\,dt$

Ainsi $dt = {du}/{u}$

Ainsi

$$\int_0^x \frac{1}{1+e^t}\,dt = \int_1^{e^x} \frac{1}{1+u}\,\frac{du}{u} = \int_1^{e^x} \frac{1}{(1+u)u}\,du$$

De plus $\underbrace{\frac{1}{(1+u)u} = \frac{a}{(1+u)} + \frac{b}{u}}_{\textit{éléments simples}}$

A finir.

$$\boxed{\int_1^x \sin(\ln t)\,dt \quad \text{on pose} \quad u = \ln(t).}$$

Les Bornes.

Si $t=1$ alors $u=\ln(1)=0$.

Si $t=x$ alors $u=\ln(x)$.

Différentielle.

Comme $u=\ln(t) \implies du = \frac{1}{u}\,dt = \frac{1}{e^u}\,dt$

Ainsi $dt = e^{-u}\,du$

Ainsi

$$\int_1^x \sin(\ln t)\,dt = \int_0^{\ln(x)} \sin(u)\,e^{-u}\,du$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on fait 2 IPP en intégrant 2 fois e^{-u}.

A finir.

$$\boxed{\int_1^2 \frac{1}{x(1+x^p)}\,dx \quad \text{on pose} \quad t = x^p.}$$

Les Bornes.

Si $x=1$ alors $t=1^p=1$.

Si $x=2$ alors $t=2^p$.

Différentielle.

Comme $t=x^p$

$\implies dt = p\,x^{p-1}\,dx = p\,(t^{1/p})^{p-1}\,dx$

Ainsi $dx = \frac{1}{t^{(p-1)/p}}\,dt$

Ainsi

$$\int_1^2 \frac{1}{x(1+x^p)}\,dx = \int_1^{2^p} \frac{1}{t^{1/p}(1+t)}\,\frac{1}{t^{(p-1)/p}}\,dt$$

$$= \int_1^{2^p} \frac{1}{(1+t)}\,\frac{1}{t}\,dt$$

De plus $\underbrace{\frac{1}{(1+t)t} = \frac{a}{(1+t)} + \frac{b}{t}}_{\textit{éléments simples}}$

A finir.

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

$$\left(t^4+t+1\right)\sqrt[3]{t} = t^{4+1/3}+t^{1+1/3}+t^{1/3} \quad \overset{\textit{Une primitive}}{----->} \quad \frac{t^{5+1/3}}{5+1/3}+\frac{t^{2+1/3}}{2+1/3}+\frac{t^{1+1/3}}{1+1/3}$$

$$e^{(2i+3)x} \quad \overset{\textit{Une primitive}}{----->} \quad \frac{e^{(2i+3)x}}{2i+3}$$

$$\frac{1}{2x+3} \quad \overset{\textit{Une primitive}}{----->} \quad \frac{1}{2}\ln|2x+3|$$

$$\frac{1}{1-x}=\frac{-1}{x-1} \quad \overset{\textit{Une primitive}}{----->} \quad -\ln|x-1|$$

$$\frac{sin(x)}{cos(x)}=\frac{-\square'}{\square} \quad \overset{\textit{Une primitive}}{----->} \quad -\ln|\square| = -\ln|\cos(x)|$$

$$\frac{1}{x(x+1)}=\underbrace{\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}}_{\textit{éléments simples}} \quad \overset{\textit{Une primitive}}{----->} \quad a\ln|x|+b\ln|x|$$

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+2}=\underbrace{\frac{a}{x-r}+\frac{b}{x-r'}}_{\textit{éléments simples}} \quad \overset{\textit{Une primitive}}{----->} \quad a\ln|x-r|+b\ln|x-r'|$$