DM 3 : Somme.

Consignes pour le DM.

> Une copie pour 2 personnes (les associations se font par ordre alphabétique)
> La première copie est une copie double (qui peut contenir des feuilles simples mais il faut une copie double)

Exercice 1. [Correction] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k!}{k^{n+1-k}}$

Calculer P_{n+1} en fonction de P_n. Que peut-on conclure ?

Exercice 2. [Correction] On considère la suite (A_n) définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

1. Montrer que : $\forall\, x \geqslant 0,\ 1 + x \leqslant e^x$.
2. En déduire un majorant pour la suite (A_n), CàD déterminer K tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ A_n \leqslant K$

Exercice 3. [Correction] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, ..., (n-1)\}$ On considère les réels $u_k = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$

1. Simplifier $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ puis montrer que $\forall\, k \in \{1, .., n-1\}\,,\quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \frac{1}{2}$
2. Montrer que : $\forall\, k \in \{1, .., n\}\,,\quad \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = u_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$
3. En déduire, *en cheminant et à l'aide de la formule du binôme*, que : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3$

Exercice 4. [Correction] Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, On considère

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 3^k \sin^3\left(\frac{x}{3^k}\right)$$

1. On admet que : $\forall \Box \in \mathbb{R},\ \sin(\Box) = \frac{e^{i\Box} - e^{-i\Box}}{2i}$ et que le formulaire sur les exp s'applique.

   Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}$
2. En déduire une expression simple de S_n.
3. On admet que $\lim\limits_{\Box \to 0^+} \frac{\sin \Box}{\Box} = 1$.

   Déterminer la limite, quand $n \to \infty$, de la suite (S_n)

Exercice 5. [Correction] On considère la suite (S_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$

1. Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
   (a) On considère la fonction $h : x \longmapsto (n+1)\ln\left(\frac{x+1}{n+1}\right) - n\ln\left(\frac{x}{n}\right)$.

   Montrer que la fonction h est positive sur $[1, n]$.

   (b) En déduire que : $\forall\, k \in \{1, ..., n\},\ \left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1}$

   puis que la suite (S_n) est monotone.
2. Majoration.
   (a) Montrer que : $\forall\, x > 0,\ \ln(x) \leqslant x - 1$

   (b) En déduire que : $\forall\, k \in \{0, 1, ..., n\},\ \left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant e^{k-n}$.

   (c) En déduire que la suite (S_n) est majorée par $\frac{e}{e-1}$

Exercice 6. [Correction] On va démontrer par récurrence l'énoncé $H_{<n>}$ suivant

$$\left.\begin{array}{c} x_1, x_2, .., x_n \text{ sont des réèls } > 0 \\ ET \\ x_1 \times x_2 \times ... \times x_n = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 + x_2 + ... + x_n \geqslant n$$

1. Démontrer que l'énoncé $H_{<2>}$ est vrai.
2. On va démontrer que $H_{<3>} \Longrightarrow H_{<4>}$.
   (a) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g : x \longmapsto g(x) = x + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

   Démontrer que, sur $]0, +\infty[$, la fonction g admet un minimum que l'on déterminera.

   (b) On suppose que l'énoncé $H\langle 3\rangle$ est vrai, CàD

$$\left.\begin{array}{c} \square, \square', \square'' \text{ sont des réels } > 0 \\ ET \\ \square \times \square' \times \square'' = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{alors on a } \square + \square' + \square'' \geqslant 3$$

   On va démontrer $H_{<4>}$. Comme $H_{<4>}$, c'est de la forme $[\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}]$,

   On suppose $\mathscr{A}$, CàD que x_1, x_2, x_3, x_4 sont > 0 et que $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 = 1$

   On veut montrer $\mathscr{B}$
   CàD $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 4$

   Pour démontrer $\mathscr{B}$,

   On commence par appliquer $H_{<3>}$ avec $\square = x_1 \times (x_4)^{1/3}$, $\square' = x_2 \times (x_4)^{1/3}$ et $\square'' = x_3 \times (x_4)^{1/3}$.
   Est ce possible ? et qu'obtient-on ?
   Puis il faut poursuivre pour conclure. (Rq il faudra aussi utiliser la fonction g)
3. Maintenant que j'ai "détaillé" la démonstration de $H_{<3>} \Longrightarrow H_{<4>}$,
   montrer que : $H_{<n>} \Longrightarrow H_{<n+1>}$.
4. Montrer que l'implication $H_{<n>}$ permet démontrer l'inégalité arithmético-géométrique
   CàD $\forall\, (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^*\ \sqrt[n]{x_1\, x_2 ... x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) On sait que $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k!}{k^{n+1-k}}$

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \prod_{k=1}^{n+1} \frac{k!}{k^{n+2-k}} \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \frac{k!}{k^{n+1-k}} \end{aligned}$$

Or on sait que $(a_1b_1)(a_2b_2)\cdots = (a_1a_2\cdots)(b_1b_2\cdots)$

$$\begin{aligned} &= \left(\prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n+1} \frac{k!}{k^{n+1-k}}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k!}{k^{n+1-k}}\right) \underbrace{\frac{(n+1)!}{k^0}}_{k=n+1} = P_n \end{aligned}$$

La suite (P_n) est donc constante égale à 1 car $P_1 = 1$.

$$\text{Conclusion : } \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \prod_{k=1}^{n} k! = \prod_{k=1}^{n} k^{n+1-k}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. La fonction $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$

   Donc $\forall x \geqslant 0, \quad \underbrace{1+x}_{\text{eq de tgt en } 0} \leqslant e^x$

2. On va majorer le produit A_n.

   $>$ Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on utilise Q1 avec $x = k/n^2 > 0$
   $$\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant e^{\frac{k}{n^2}}$$
   $>$ On "produise" de $k=1$ à $k=n$

$$\textit{Ainsi} \quad A_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n^2}}$$
$$\leqslant \underbrace{e^{\frac{1}{n^2}}}\,\underbrace{e^{\frac{2}{n^2}}}\cdots\underbrace{e^{\frac{n}{n^2}}}$$
$$\leqslant e^{\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}}$$
$$\leqslant \exp\left(\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}\right)$$
$$\leqslant \underbrace{\exp\left(\frac{n+1}{2n}\right)}_{\textit{Attention ça dépend de } n} \leqslant \exp\left(\frac{n+n}{2n}\right) = e^1$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) On considère les réels

$$u_k = \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \quad \text{avec } k \in \{1, .., n\}$$

On a donc $u_0 = \dfrac{\binom{n}{0}}{n^0} = \dfrac{1}{1} = 1$

1. Soit $k \in \{1, .., n\}$

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{\binom{n}{k+1}}{n^{k+1}}}{\frac{\binom{n}{k}}{n^k}} = \frac{n^k}{n^{k+1}}\,\frac{\frac{n!}{(k+1)!\ (n-(k+1))!}}{\frac{n!}{(k)!\ (n-k)!}} = \frac{1}{n}\,\frac{(k)!\ (n-k)!}{(k+1)!\ (n-(k+1))!} = \frac{1}{n}\,\frac{(n-k)}{(k+1)}$$

   Comme $k \in \{1, .., n\}$, on a

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{n}\,\frac{(n-k)}{(k+1)} \leqslant \frac{1}{n}\,\frac{(n-\square)}{(\square+1)} = \frac{1}{n}\,\frac{(n-1)}{(1+1)} = \frac{n-1}{2n} \leqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

2. On a "à la mode géo" $u_k \leqslant \frac{1}{2}u_{k-1} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_{k-2}\right)$

   Attention on s'arrête à u_1
   $$\leqslant \frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

3. On a avec le binôme

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\square^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
$$= u_0 + u_1 + ... + u_n$$

On utilise la majoration

Si $k \in \{1, ..n\}$, $u_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$$\leqslant \underbrace{1}_{=u_0} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$
$$\leqslant 1 + 2\left[\frac{1-\square^{n+1}}{1-\square} - 1\right] = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 3 - \mathscr{O} = 3$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. On a $\forall\, x,\ \sin^3(x) = \dfrac{1}{4}\left[3\sin(x) - \sin(3x)\right]$

   Ainsi on a le télescopage

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=0}^{n} 3^k \sin^3\left(\frac{x}{3^k}\right) &= \sum_{k=0}^{n} 3^k \frac{1}{4}\left[3\sin\left(\frac{x}{3^k}\right) - \sin\left(3\frac{x}{3^k}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left[3^{k+1}\sin\left(\frac{x}{3^k}\right) - 3^k\sin\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right)\right] \\
&\quad \textit{télescopage !!!} \\
&= \frac{1}{4}\left[3^{n+1}\sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - \sin\left(\frac{x}{3^{-1}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[3^{n+1}\sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - \sin\left(3x\right)\right]
\end{aligned}$$

2. On admet que $\lim\limits_{\square\to 0^+} \dfrac{\sin\square}{\square} = 1$

   ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}{\frac{x}{3^n}} = 1$

   Conclusion : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{4}\left[3x - \sin(3x)\right]$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
   (a) Étude de fonction et tableau de signe.
   (b) *Pour une fois, on va suivre la démarche de terminanle.*
   Pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. Comme la fonction $\ln$ est croissante, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1} &\iff \ln\left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &\iff h(k) \geqslant 0 \textit{ Fini} \end{aligned}$$

   On a $S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{k}{n+1}\right)^{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n$

   On ré-indexe la première somme avec $k = k' + 1$

$$= \sum_{k'=0}^{n}\left(\frac{k'+1}{n+1}\right)^{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\geqslant 0} + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(\frac{k}{n}\right)^n}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

2. Majoration.
   (a) Concavité de la fonction $\ln$ ou bien on étudie la fonction $h : x \longmapsto (x-1) - \ln(x)$
   (b) Pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, on a

$$\left(\frac{k}{n}\right)^n = e^{n\ln(k/n)} \leqslant e^{n(k/n - 1)} = e^{k-n}$$

   (c) On somme de $k = 1$ à $k = n$

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n &\leqslant \sum_{k=1}^{n} e^{k-n} \\ &\leqslant e^{-n}\sum_{k=1}^{n} e^k \\ &\leqslant e^{-n}\left(\frac{1-e^{n+1}}{1-e} - 1\right) \\ &\leqslant \frac{e(1-e^{-n})}{e-1} \leqslant \frac{e(1-\mathscr{O})}{e-1} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. $H\langle 2\rangle$ c'est $[A \implies B]$ donc
   Je suppose que x_1 et x_2 sont >0 et que $x_1.x_2 = 1$

   $$\boxed{\begin{array}{c}\text{On veut montrer}\\ x_1 + x_2 \geqslant 2\end{array}}$$

   On y va direct

   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2 = & \\ & \text{Comme } x_1.x_2 = 1, \text{ on a} \\ & = x_1 + \frac{1}{x_1} - 2 \\ & = \frac{(x_1)^2 + 1 - 2x_1}{x_1} = \frac{(x_1 - 1)^2}{x_1} \geqslant 0 \ \text{ Fini} \end{aligned}$$

2. On va démontrer que $H\langle 3\rangle \implies H\langle 4\rangle$.
   (a) On considère la fonction g définie par

   $$g(x) = x + \frac{3}{(x)^{\frac{1}{3}}}$$

   > La fonction g est déf, C^0 , dérivable (et même C^∞) sur $\mathfrak{D} =]0, +\infty[$

   $$\begin{aligned} g'(x) = \left[x + \frac{3}{(x)^{\frac{1}{3}}}\right]' &= \left[x + 3.x^{-\frac{1}{3}}\right]' \\ &= 1 + 3.\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1} \\ &= 1 - \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{x^{\frac{4}{3}} - 1}{x^{\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

   Or on sait (propriétés de monôme) que : Lorsque $\gamma > 0$, on a $x \geqslant 1 \implies x^\gamma \geqslant 1$

   > On fait une bô tableau de Signe-Variation

   Et on conclut que $Si\ \square > 0$, alors $g(\square) \geqslant g(1) = 4$

   (b) On suppose que l'énoncé $H\langle 3\rangle$ est vrai

   $$\text{CàD on suppose que}\quad \left.\begin{array}{c}\square, \square'\square'' \text{ sont des rééls } > 0\\ ET\\ \square \times \square' \times \square'' = 1\end{array}\right\} \implies \square + \square' + \square'' \geqslant 3$$

   on suppose que x_1, x_2, x_3, x_4 sont >0 et que $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 = 1$

   $$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{On veut montrer B}\\ \quad\text{CàD}\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 4\end{array}}$$

   Je considère $\square = x_1 \times (x_4)^{\frac{1}{3}}$, $\square' = x_2 \times (x_4)^{\frac{1}{3}}$ et $\square'' = x_3 \times (x_4)^{\frac{1}{3}}$.

   $\boxed{\text{Avant d'utiliser la conclusion de } H\langle 3\rangle\text{, on vérifie les hypothèse de } H\langle 3\rangle}$

   $$\begin{array}{ll}\textbf{Comme} & \square,\ \square' et\ \square'' \text{ sont des nombres } > 0\\ & ET\\ & \square.\square'.\square'' = x_1 \times (x_4)^{\frac{1}{3}}.x_2 \times (x_4)^{\frac{1}{3}}.x_3 \times (x_4)^{\frac{1}{3}} = x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 = 1\end{array}$$

   Donc on peut appliquer $H\langle 3\rangle$ avec $\square,\ \square' et\ \square''$

   > Ainsi on obtient

   $$\begin{aligned} \square + \square' + \square'' = x_1 \times (x_4)^{\frac{1}{3}} + x_2 \times (x_4)^{\frac{1}{3}} + x_3 \times (x_4)^{\frac{1}{3}} &\geqslant 3 \\ \implies (x_4)^{\frac{1}{3}}(x_1 + x_2 + x_3) &\geqslant 3 \\ \implies x_1 + x_2 + x_3 &\geqslant \frac{3}{(x_4)^{\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

$>$ On a maintenant

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &\geqslant (x_1+x_2+x_3)+x_4 \\ &\geqslant \frac{3}{(x_4)^{\frac{1}{3}}}+x_4 = g(x_4) \geqslant 4 \text{ FINI} \end{aligned}$$

3. On suppose $H\langle n\rangle$ ET

   On suppose que $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ sont >0 et que $x_1 \times x_2 \times .. \times x_{n+1} = 1$

   On veut montrer B
   CàD $x_1+x_2+...+x_{n+1} \geqslant n+1$

   Je considère $\square_1 = x_1 \times (x_{n+1})^{\frac{1}{n}}$, $\square_2 = x_2 \times (x_{n+1})^{\frac{1}{n}}$,.... et $\square_n = x_n \times (x_{n+1})^{\frac{1}{n}}$.

   $>$ Comme $\square_1, \square_2, ..., \square_n$ sont des nombres >0
   Et que $\square_1.\square_2...\square_n = ... = 1$,
   on peut appliquer $H\langle n\rangle$ avec $\square_1, \square_2, ..., \square_n$
   Ainsi on a

$$\begin{aligned} &\square_1+\square_2+...+\square_n \geqslant n \\ &\implies x_1 \times (x_{n+1})^{\frac{1}{n}} + x_2 \times (x_{n+1})^{\frac{1}{n}} + ... + x_n \times (x_{n+1})^{\frac{1}{n}} \geqslant n \\ &\implies \text{Donc on a } \; x_1 \times +x_2+...+x_n \geqslant \frac{n}{(x_{n+1})^{\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

   $>$ Maintenant on a

$$x_1 \times +x_2+...+x_n+x_{n+1} = (.....)+x_{n+1} \geqslant \frac{n}{(x_{n+1})^{\frac{1}{n}}}+x_{n+1} = h(x_{n+1})$$

$\implies$ On étudie la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{n}{(x)^{\frac{1}{n}}}+x$

On en déduit du tableau de variations que
$Si\ \square > 0$, alors $h(\square) \geqslant h(1) = n+1$

   $>$ **Conclusion** :

$$\begin{aligned} x_1 \times +x_2+...+x_n+x_{n+1} &\geqslant \frac{n}{(x_{n+1})^{\frac{1}{n}}}+x_{n+1} \\ &\geqslant h(x_{n+1}) = h(\square) \geqslant n+1 \;\; Ouf,\ Fini \text{ !!!} \end{aligned}$$

4. Pour tout $a_1, ..., a_n > 0$.

   Je note $G = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times ... \times a_n} > 0$.
   On considère les nombres $x_1 = \dfrac{a_1}{G}$,..., $x_n = \dfrac{a_n}{G}$
   Les nombres $x_1, ..., x_n$ sont strictement positifs et $x_1 \times x_2 \times ... \times x_n = ... = 1$
   Donc d'après $H_{<n>}$, on sait que :

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+...+x_n \geqslant n \\ &\implies \frac{a_1}{G}+\cdots+\frac{a_n}{G} \geqslant n \\ &\implies \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geqslant G = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times ... \times a_n} \qquad \text{Fini} \end{aligned}$$