DM 4. Autour des intégrales

Consignes pour le DM.

> Une copie pour 2 personnes (les associations se font par ordre alphabétique)
> La première copie est une copie double (qui peut contenir des feuilles simples mais il faut une copie double)

Intégrale

Exercice 1. [Correction] On considère les suites (S_n) et (I_n) définies par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \textit{et} \quad I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^{-t} dt$$

1. À l'aide du théorème des gendarmes, montrer que $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \dfrac{-1}{e}\dfrac{1}{(n+1)!} + I_n$
3. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - eI_n$
4. Conclusion (à justifier et compléter) : La suite (S_n) converge vers ......

Exercice 2. [Correction] On considère les suites (S_n) et (In) définies par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt \quad \textit{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

1. À l'aide d'un encadrement, montrer que : $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
2. Démontrer que : $\forall\, t \geqslant 0,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$
3. En déduire que : $S_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots.. + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 - (-1)^n\ I_n$
4. Conclusion (à justifier et compléter) : La suite (S_n) converge vers ......

Exercice 3. [Correction] On considère la fonction de la variable réelle

$$D : x \longmapsto D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

On admet que la fonction D est définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

1. Étudier la parité de D, CàD calculer $D(-x)$ en fonction de de $D(x)$
2. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad xe^{-x^2} \leqslant D(x) \leqslant x$.
3. Ordre de grandeur de $D(x)$ quand $x \to \infty$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \displaystyle\int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt.$
   (b) Soit la fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{t^2}}{t^2}$.
      i. Montrer que h est croissante sur $[1, +\infty[$.
      ii. En déduire que : $\forall x \in [1, +\infty[\,, \quad \displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leqslant h(x) \int_1^x \frac{1}{t^2} dt,$
      iii. À l'aide du théorème des gendarmes, montrer que $\dfrac{\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt}{e^{x^2}/2x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$
   (c) Déduire de ce qui précède que $2x\, D(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$.

Plus difficile

Exercice 4. [Correction] L'inégalité de Hölder.

Cet exercice est délicat

La question 1 est une délicate révision sur le calcul et le manipulation de puissance.
La question 2 est plus simple mais il faut manipuler les V.A.
La question 3 est difficile

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, .., x_n, y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Soit $(p,q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

1. Soient $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, démontrer que le minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction
$$h : t \longmapsto a^p \, \frac{t^{\frac{-1}{q}}}{p} + b^q \, \frac{t^{\frac{1}{p}}}{q} \quad \text{vaut } ab.$$
2. En déduire que pour tout $t > 0$:
$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \right| \leqslant \frac{t^{\frac{-1}{q}}}{p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{t^{\frac{1}{p}}}{q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q$$
3. En déduire l'inégalité de Hölder :
$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Sur $[0,1]$, on a $0 \leqslant t^n e^{-t} \leqslant t^n\, e^{-0}$

   On intègre et on gendarme

2. IPP

3. Récurrence car $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{n+1}$.

   OU Bien Pour $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k!} = e\,(I_{k-1} - I_k)$ puis calcule de S_n avec le télescope.

4. On a $S_n = e - e \underbrace{I_n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} e$

   Conclusion : La suite (S_n) converge vers e.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Étude de (I_n).

   (a) On va encadrer l'intégrale

   $> \forall\, t \in [0,1]$

   $$\frac{0}{1+1} \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant \frac{t^n}{1+0}$$

   >J'intègre l'inégalité sur $[0,1]$

   $$\text{Ainsi } 0 \leqslant I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt \leqslant \int_0^1 t^n\, dt$$

   Or $\displaystyle\int_0^1 t^n\, dt = [\ Primitive]_0^1 = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

   (b) C'est le théorème des 2 gendarmes.

2. On reconnait une Somme géo.

3. On remarque que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = [\ \ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$

   On intègre l'égalité de la question précédent sur $[0,1]$, ainsi

   $$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = \int_0^1 \left[1 - t + t^2 - .... + (-1)^{n-1}\, t^{n-1} + (-1)^n\, \frac{t^n}{1+t}\right] dt$$

   $>$ A Gauche : c'est égale à $\ln(2)$

   $>$ A Droite : c'est égale à $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} + (-1)^n\ I_n$

   Comme $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, on a

   $$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{1492}}{1492} + ... + \text{jusqu'à l'infini.}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. On a $f(-x) = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^{-x} e^{t^2}\, dt.$

   On fait le changement de variable $u = -t$

   $$\text{Ainsi on obtient} \quad \int_0^{-x} e^{t^2}\, dt = -\int_0^{x} e^{u^2}\, du.$$

   Ainsi $f(-x) = -f(x)$. La fonction f est donc impaire.

2. Pour tour $x > 0$.

   $> \forall t \in [0,x],\ e^0 \leqslant e^{t^2} \leqslant e^{x^2}$

   $>$ On intègre l'inégalité sur $[0,x]$

   Ainsi $x \leqslant \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt \leqslant x.e^{x^2}.$

   On en déduit l'encadrement en multipliant par $e^{-x^2} > 0$.

3. (a) Ipp en partant de $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$

   (b) Soit la fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{t^2}}{t^2}$.

   i. La fonction h est dérivable sur $\mathscr{D} = [1, \infty[$.

   $$\text{De plus } \forall t \geqslant 1,\ f'(t) = \left[\frac{e^{t^2}}{t^2}\right]' = \frac{2te^{t^2}.t^2 - e^{t^2}.2t}{(t^2)^2} = \frac{2te^{t^2}(t^2-1)}{\dots > 0} \underbrace{\geqslant 0}_{\text{car } t \geqslant 1}$$

   Donc la fonction est croissante sur l'intervalle $\mathscr{D}$.

   ii. Soit $x > 1$, on a

   $> \forall t \in [1,x],\ \dfrac{e^{t^2}}{t^4} = \dfrac{e^{t^2}}{t^2}\dfrac{1}{t^2} = h(t)\dfrac{1}{t^2} \leqslant h(x)\dfrac{1}{t^2}$ car la fonction h est croissante

   $>$ On intègre l'inégalité sur $[1,x]$

   $$\text{Ainsi } \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leqslant \int_1^x h(x)\frac{1}{t^2} dt = h(x) \underbrace{\int_1^x \frac{1}{t^2} dt}_{=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}} = \frac{e^{x^2}}{x^2}\,\frac{x-1}{x}$$

   iii. On a facilement $Quotient = \dfrac{petit}{Gros} = \dfrac{\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt}{e^{t^2}/2t} = \dfrac{positif}{positif} \geqslant 0$

   $$\text{Ainsi} \quad 0 \leqslant Quotient = \frac{petit}{Gros} \leqslant \frac{\frac{e^{x^2}}{x^2}\frac{x-1}{x}}{e^{x^2}/2x} = \frac{2(x-1)}{x^2}$$

   Ainsi le théorème des gendarmes assure que $Quotient \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

   (c) Comme $\displaystyle\int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$, on a

   $$\begin{aligned} D(x) &= e^{-x^2}\left(\int_0^1 e^{t^2} dt + \int_1^x e^{t^2} dt\right) \\ &= e^{-x^2}\left(Konstante + \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt\right) \\ &= K\,e^{-x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^3} - \frac{3e}{4}\,e^{-x^2} + \frac{3}{4}e^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \end{aligned}$$

   $$\textit{Ainsi } 2x\,D(x) = \underbrace{K\,2x\,e^{-x^2}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{}0} + 1 + \underbrace{\frac{2x}{4x^3}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{}0} - \underbrace{\frac{3e}{4}\,e^{-x^2}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{}0} + \frac{3}{4}\underbrace{2x\,e^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt}_{\xrightarrow[x\to\infty]{}0 \text{ voir ci dessus Q3b.iii}}$$

   Conclusion : $2x\,D(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1.$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, .., x_n, y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Soit $(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

1. La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall\, t > 0,\ h'(t) = \frac{d}{dt}\left[a^p\,\frac{t^{\frac{-1}{q}}}{p} + b^q\,\frac{t^{\frac{1}{p}}}{q}\right] = a^p\,\frac{-1}{q}\,\frac{t^{\frac{-1}{q}-1}}{p} + b^q\,\frac{1}{p}\,\frac{t^{\frac{1}{p}-1}}{q}$$

$$= \frac{t^{-1}}{pq}\left[-a^p\,\frac{1}{t^{\frac{1}{q}}} + b^q\,t^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$= \frac{1}{pq\,t}\left[\frac{-a^p + b^q\,t^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}{t^{\frac{1}{q}}}\right]$$

$$= \frac{1}{pq\,t}\left[\frac{-a^p + b^q\,t}{t^{\frac{1}{q}}}\right]$$

D'où le tableau

x	0		a^p/b^q		$+\infty$
$-a^p + b^q\,t$		$-$	0	$+$	
h'		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	↘	m	↗	$+\infty$

Ainsi le minimum m de de la fonction h vaut

$$m = h\left(\frac{a^p}{b^q}\right) = a^p\,\frac{\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{\frac{-1}{q}}}{p} + b^q\,\frac{\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{p}}}{q}$$

$$= \frac{a^p\,a^{\frac{-p}{q}}\,b^{\frac{q}{q}}}{p} + \frac{a^{\frac{p}{p}}\,b^q\,b^{\frac{-q}{p}}}{q}$$

Or $p + \dfrac{-p}{q} = p\left(1 + \dfrac{-1}{q}\right) = p\dfrac{1}{p} = 1$ et $q + \dfrac{-q}{p} = \cdots = 1$

$$= ab\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = ab$$

2. Avec l'inégalité triangulaire, on a $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\right| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i|$

Pour tout $t > 0$ et tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

On utilise la fonction h avec $a = |x_i|$ et $b = |y_i|$

Ainsi on a $|x_i|\,|y_i| = ab \leqslant h(t) = |x_i|^p\,\dfrac{t^{\frac{-1}{q}}}{p} + |y_i|^q\,\dfrac{t^{\frac{1}{p}}}{q}$

Puis on somme de $i = 1$ à $i = n$

Ainsi tout $t > 0$: $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\right| \leqslant \dfrac{t^{\frac{-1}{q}}}{p}\,\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \dfrac{t^{\frac{1}{p}}}{q}\,\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q$

3. L'inégalité précédent assure que $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\right|$ est un minorant sur $\mathbb{R}_+^*$

pour fonction h avec $a = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $b = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

Or le minimum de la fonction h est ab, ainsi on a

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\right| \leqslant ab = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$