TD 6 Intégrale-Primitive.

Jeudi 03 Octobre 2024.

Exercice 1. On considère la fonction h définie par l'expression

$$h(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

On admet que la fonction h est bien définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

1. Étudier la parité de D.
2. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad xe^{-x^2} \leqslant D(x) \leqslant x$.

Exercice 2. [Correction] On considère la suite (I_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \displaystyle\int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx$

1. Convergence de I_n.
   (a) Montrer que : $\forall\, x \in [1, e],\ \ln(x) \leqslant \dfrac{x}{e}$
   (b) En déduire un encadrement de I_n, puis que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Ordre de grandeur de I_n.
   (a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$
   (b) En déduire la limite de nI_n quand $n \to +\infty$. Conclure.

Exercice 3. [Correction] Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$

À l'aide d'un changement de variable, montrer que : $\forall\, x \in \mathscr{D},\ f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$.

Exercice 4. [Correction] On va étudier que la suite (S_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

1. Montrer que : $\forall\, k \geqslant 2, \quad \dfrac{1}{k^3} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^3} dt$
2. En déduire $\forall\, n \geqslant 1, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$.
3. Montrer que la suite (S_n) est croissante et majorée.
   La suite (S_n) converge-t-elle ?

Exercice 5. À l'aide du changement de variable, calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\,(1+x^p)} dx$ *on posera* $t = x^p$.

Exercice 6. [Correction] Soit $x > 1$.

Montrer que : $\forall\, x > 1, \ \displaystyle\int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2} - 2ex}{2x} + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$

Exercice 7. [Correction] Calcules les primitives des fonctions suivantes

$2x^4 - 5x^3 - \dfrac{1}{2x} + e^{-x}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$

$(2t+1)^3$ *sur* $\mathbb{R}$

$\sqrt{2x} + \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ *Sur* $\mathbb{R}_+^*$

$\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^3}$ *Sur* $\mathbb{R}_+^*$

$\left(t^4 + t + 1\right)\sqrt[3]{t}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$

$\sin(3x) - e^{-2x} + \dfrac{1}{1+x}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$

$\cos(x/2) - e^{3x} + \dfrac{1}{1-x}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$

$\dfrac{1}{1-2x} + \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Exercice 8. [Correction] Dire comment on déterminerai une primitive pour les fonctions suivantes
Si vous avez du courage faites les calculs

$\tan(t)$ *sur* $\left]{-\pi}/2\,, {\pi}/2\right[$

te^{-3t^2} sur $\mathbb{R}$

$\dfrac{t^2}{1+t^3} + \dfrac{t}{1+t^2} + \dfrac{2}{1+t^2}$

$\dfrac{1}{t\ln(t)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Correction.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) On définie pour tout entier n

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \; dx$$

1. Convergence de I_n.

   (a) On étudie la fonction h définie par $\forall\, t \geqslant 0,\;\; h : t \longmapsto h(t) = \dfrac{t}{e} - \ln(t)$

   (b) On y va classique.
   $>$ Soit $t \in [1, e]$,

$$x^2 (\ln x)^n \leqslant x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{x^{n+2}}{e^n}$$

   $>$ On intègre sur $[1, e]$, ainsi

$$\begin{aligned} I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \; dx &\leqslant \int_1^e \frac{x^{n+2}}{e^n} dx \\ &\leqslant \left[\frac{1}{e^n}\frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_1^e = \frac{e^{n+3}-1}{e^n(n+3)} = \frac{e^3}{n+3} - \frac{1}{e^n(n+3)} \end{aligned}$$

   De plus on a facilement $\forall\, n \in \mathbb{N},\;\; I \geqslant 0$
   Donc avec le théorème des 2 gendarmes, on a $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Détermination de la limite la suite (nI_n) .

   (a) On fait une IPP.

   (b) Le texte demande d'étudier nI_n donc on isole nI_nCàD

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{3} I_n &= \frac{e^3}{3} - I_{n+1} \\ &\Rightarrow nI_n = e^3 - 3I_{n+1} - I_n \end{aligned}$$

   Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (n\, I_n) = \lim_{n\to\infty} \left(e^3 - 3I_{n+1} - I_n\right) = e^3 - 3.0 - 0 = e^3$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) On fait le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) 1. Pour $k \geqslant 2$, on minore l'intégrale $\displaystyle\int_{k-1}^k \frac{1}{t^3} dt$

2. On somme l'inégalité de $k = 2$ à $k = n$ et on ajoute le plateau $k = 1$, ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} &\leqslant \underbrace{1}_{k=1} + \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t^3} dt \\ &= 1 + \int_1^2 \frac{1}{t^3} dt + \int_2^3 \frac{1}{t^3} dt + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{1}{t^3} dt \\ &= 1 + \int_1^n \frac{1}{t^3} dt \\ &= 1 + \left[\frac{-1}{2t^2}\right]_1^n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

3. Montrer que la suite (S_n) est croissante car $S_{n+1} - S_n = \ldots \geqslant 0$ et majorée par $\dfrac{3}{2}$.

   La suite (S_n) converge vers $\ell \leqslant \dfrac{3}{2}$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) on fait une IPP en partant de $\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\, dt$

Bonus

C'est une IPP, mais 'pas évidente' $\quad u = \dfrac{1}{2t} \qquad u' = \dfrac{-1}{2t^2}$

$v' = 2t\, e^{t^2} \qquad v = e^{t^2}$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

$2x^4 - 5x^3 - \dfrac{1}{2x} + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{2\,\frac{x^5}{5} - 5\,\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\,\ln|x| + (-1)e^{-x}}$$

$(2t+1)^3$

$$\boxed{\frac{1}{8}2t+3)^4}$$

$\sqrt{2x} + \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ Sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{\sqrt{2}\ Mon\hat{o}me\ + \frac{1}{\sqrt{2}}\ Mon\hat{o}me}$$

$\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^3}$ Sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{Mon\hat{o}me\ +\ Mon\hat{o}me}$$

$\left(t^4+t+1\right)\sqrt[3]{t} = t^{4+1/3} + t^{1/3} + t^{1/3}$

$$\boxed{Mon\hat{o}me\ +\ Mon\hat{o}me\ +\ Mon\hat{o}me}$$

$\sin(3x) - e^{-2x} + \dfrac{1}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{\frac{-1}{3}\cos(3x) - \frac{1}{(-2)}e^{-2x} + \ln|1+x|}$$

$\cos(x/2) - e^{3x} + \dfrac{1}{1-x} = \cos(x/2) - e^{3x} \ominus \dfrac{1}{x-1}$

$$\boxed{2\sin(x/2) - \frac{1}{3}e^{3x} - \ln|1+x|}$$

$$\frac{1}{1-2x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \ominus\frac{1}{2x-1} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln|2x-1| + 2\arctan(x) + \ Mon\hat{o}me}$$

Solution de l'exercice 8 **(Énoncé)**

$$\tan(t) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\square'}{\square}$$

$$\boxed{-\ln|\cos(x)|}$$

$$te^{-3t^2} = \square' e^{\square}$$

$$\boxed{\frac{1}{(-3)} e^{-3t^2}}$$

$$\frac{t^2}{1+t^3} + \frac{t}{1+t^2} + \frac{2}{1+t^2} = \frac{\square'}{\square} + \frac{\square'}{\square} + 2\frac{1}{1+t^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}\ln|1+t^3| + \frac{1}{2}\ln|1+t^2| + 2\arctan(x)}$$

$$\frac{1}{t\ln(t)} = \frac{1/t}{\ln(t)} = \frac{\square'}{\square}$$

$$\boxed{\ln|\ln(x)|}$$