TD 4 Somme et Complexe.

Jeudi 26 Septembre 2024.

Somme

Exercice 1. [Correction] Soit $x \in \mathbb{C}$. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \, x^k, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} x^k$$

Exercice 2. Simplifier $(n+1)! - n!$. En déduire la valeurs $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$.

Exercice 3. [Correction] Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$

En déduire, *à l'aide d'un télescopage*, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right)$

1. Montrer que : $\forall\, x \geqslant 0, \quad \ln(1+x) \leqslant x$
2. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n \leqslant 3/2$
3. La suite (S_n) converge-t-elle ?

Exercice 5. [Correction] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leqslant H_n$

Exercice 6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. Montrer que : $\forall\, n \geqslant 2, \quad \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$
2. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leqslant 2$.
3. La suite (S_n) converge-t-elle ?

Complexe(s)

Exercice 7. On considère $z_1 = \dfrac{4-i}{3+2i}$ et $z_2 = \dfrac{4+i}{3-2i}$

Vérifier que $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$ et $z_1 - z_2 \in i\mathbb{R}$

Exercice 8. [Correction] Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\left|\dfrac{2}{1+it} - 1\right|$
2. Géométriquement où se trouve le point M d'affixe $\dfrac{2}{1+it}$

Exercice 9. [Correction] Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $ad - bc = 1$ et $cz + d \neq 0$

$$\text{Montrer que } \mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

Exercice 10. [Correction] En utilisant $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$ ou $|z|^2 = z\,\overline{z}$

1. Soit $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que : $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right)$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$. Montrer que $|1+iz|^2 + |z+i|^2 = 4$
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$ et $|a| = 1$.

   Montrer que : $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1$

Exercice 11. [Correction] Soit u un complexe avec $u \neq 1$. Soit z un complexe avec $z \notin \mathbb{R}$.

$$\text{On veut montrer : } \frac{z - u\overline{z}}{1-u} = A \in \mathbb{R} \iff |u| = 1$$

$\Longleftarrow$ Calculer $\overline{A} - A$. Conclure.

$\Longrightarrow$ On suppose que $A \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{On doit montrer } |u| = 1\text{, CàD } u\,\overline{u} = ... = 1.}$$

Étape 1 : On isole u. Étape 2 : On calcule $u\,\overline{u}$.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) On a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{\square}^k=(1+\square)^n \qquad \textit{avec } \square=-x$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}x^k=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k-\underbrace{x^{n+1}}_{k=n+1}=(1+x)^{n+1}-x^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}x^k=\textit{On réindexe avec } p=k+1$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}x^{p-1}=x^{-1}\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}x^p=\frac{1}{x}\left[\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^p-\underbrace{1}_{p=0}\right]=\frac{1}{x}\left[(1+x)^n-1\right]$$

Remarque : le calcul est valide pour $x\neq 0$.

La situation particulière $x=0$ est facile à traiter

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) On trouve $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1/2}{k}+\dfrac{-1}{k+1}+\dfrac{1/2}{k+2}$

Avec le télescope, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=....=$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. Différence.
2. J'applique l'inégalité avec $1,2,3,...,n$ ainsi on obtient

$$\begin{aligned}\ln(2)-\ln(1)&\leqslant 1/1\\ \ln(3)-\ln(2)&\leqslant 1/2\\ \ln(4)-\ln(3)&\leqslant 1/3\\ &......\\ \ln(n)-\ln(n-1)&\leqslant 1/(n-1)\\ \ln(n+1)-\ln n&\leqslant 1/n\end{aligned}$$

Puis on somme les inégalités.

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

On a

$$\left|\frac{2}{1+it}-1\right|\overset{\text{Mariage}}{=}\left|\frac{1-it}{1+it}\right|\overset{\text{Formulaire}}{=}\frac{|1-it|}{|1+it|}\overset{\text{def module}}{=}\frac{\sqrt{(1)^2+(-t)^2}}{\sqrt{(1)^2+(t)^2}}=1$$

ou bien mais c'est plus long et plus difficile

$$\begin{aligned}\left|\frac{2}{1+it}-1\right|&\overset{\text{Forme a+ib}}{=}\left|\frac{2}{(1+it)}\frac{(1-it)}{(1-it)}-1\right|\\ &=\left|\frac{2(1-it)}{1^2+t^2}-1\right|\\ &=\left|\frac{1-t^2}{1+t^2}-i\frac{2t}{1+t^2}\right|\\ &\overset{\text{def module}}{=}\sqrt{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}\\ &=\sqrt{\frac{t^4+2t^2+1}{(1+t^2)^2}}=\sqrt{\frac{t^4+2t^2+1}{t^4+2t^2+1}}=\sqrt{1}=1\end{aligned}$$

Conclusion : $\left|\dfrac{2}{1+it}-1\right|$ = Distance entre $\dfrac{2}{1+it}$ et 1 est égale à 1.

Ainsi $\dfrac{2}{1+it}$ est sur le cercle de centre $\Omega=(1,0)$ et de Rayon 1.

Solution de l'exercice 9 (Énoncé) On a que

$$\begin{aligned}
\frac{az+b}{cz+d} &= \frac{(az+b)\overline{(cz+d)}}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{(ax+b+iay)(cx+d-icy)}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{Moche+i[acxy+ady-acxy-bcy]}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{Moche+i[(ad-bc)y]}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{Moche+i[y]}{|cz+d|^2}
\end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{Moche+i[y]}{|cz+d|^2}\right) = \frac{y}{|cz+d|^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

1. On calcule $|u+v|^2+|u-v|^2=(u+v)\overline{(u+v)}+(u-v)\overline{(u-v)}=\cdots$
2. On suppose que $|z|=1$

   On calcule $|1+iz|^2+|z+i|^2=(1+iz)\overline{(1+iz)}+(z+i)\overline{(z+i)}=\cdots$
3. Comme $|a|=1$, Donc on sait que $\overline{a}.a=|a|^2=1$

   $$\text{On va montrer que : }\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|=1$$

   On y va brutal

   $$\begin{aligned}\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|=\sqrt{Z\overline{Z}}&=\sqrt{\left(\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right)\overline{\left(\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right)}}\\&=\sqrt{\left(\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right)\left(\frac{\overline{a}-\overline{b}}{1-a\overline{b}}\right)}\\&=\sqrt{\frac{\textit{On développe le haut}}{\textit{On développe le Bas}}}\\&\quad\textit{On utilise que } a\overline{a}=|a|^2=1^2=1\\&=\sqrt{1}=1\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 11 (Énoncé)

$\Longrightarrow$ On suppose que $A\in\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{On va montrer } |u|=1, \text{ i.e. } u\,\overline{u}=....=1.}$$

On a $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}=A \implies u=\dfrac{A-\overline{z}}{A-z}$

$$\text{Ainsi on a}\quad u\overline{u}=\frac{A-\overline{z}}{A-z}.\overline{\left(\frac{A-\overline{z}}{A-z}\right)}=\frac{A-\overline{z}}{A-z}.\frac{\overline{A}-z}{\overline{A}-\overline{z}}=\frac{A-\overline{z}}{A-z}.\frac{A-z}{A-\overline{z}}=1$$

$\Longleftarrow$ Comment on démontre que $A\in\mathbb{R}$ avec la conjugaison ?

On sait que $A\in\mathbb{R} \iff \overline{A}=A \iff \overline{A}-A=0.$

$$\boxed{\text{On doit montrer } \overline{A}-A=0.}$$

On a $\overline{A}-A=\overline{\left(\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}\right)}-\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}=\cdots=0$